Programme de Mathématique Préparation **Maths-Physique**

Analyse et Géométrie Différentielle

Première Année

I. NOMBRES REELS ET COMPLEXES, SUITES ET FONCTIONS

1. Nombres réels et complexes

2. Suites de nombres réels ou complexes

3. Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes

II. FONCTIONS D'UNE VARIABLE REELLE : DERIVATION ET INTEGRATION

1. Dérivation des fonctions à valeurs réelles ou complexes

4. Intégration sur un segment

5. Intégration et dérivation

6. Equations différentielles

7. Fonctions usuelles

8. Travaux pratiques

III. NOTION SUR LES FONCTIONS DE DEUX VARIABLES REELES

1. Espace R^2, fonctions continues

9. Fonctions de deux variables à valeurs réelles : calcul différentiel

10. Fonctions de deux variables réelles : calcul intégral

11. Travaux pratiques

IV. GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

1. Courbes du plan

I. NOMBRES REELS ET COMPLEXES, SUITES ET FONCTIONS

1. Nombres réels et complexes

Corps R des nombres réels

Corps **R** des nombres réels ; relation d'ordre, compatibilité avec l'addition, la multiplication.	La construction du corps des nombres réels est hors programme.
Valeur absolue d'un nombre réel, distance de deux points, valeur absolue d'un produit, d'un quotient. Inégalité triangulaire $$\lvert\lvert x\rvert-\lvert y\rvert\rvert \le \lvert x+y\rvert \le \lvert x\rvert+\lvert y\rvert$$ Interprétation en termes de distances.	En particulier, si $\lvert u\rvert \le k < 1$, alors $$1-k \le \lvert 1+u\rvert \le 1+k$$ Les étudiants doivent savoir utiliser ces inégalités afin de majorer ou minorer le module d'une somme.
Définition des intervalles de **R**. Tout intervalle $]a,b[$ non vide rencontre **Q** et son complémentaire. Définition d'une borne supérieure, d'une borne inférieure. Toute partie majorée non vide de **R** admet une borne supérieure. Définition de la droite achevée.	Toute partie convexe de **R** est un intervalle.
Congruence de nombres réels modulo *a*, où $a > 0$.	Tout nombre réel *x* s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme $x = na + y$, où $n \in$ **Z** et $0 \le y < a$.
Partie entière d'un nombre réel. Valeurs décimales approchées à la précision 10^{-n} ; approximation par défaut, par excès.	La notion de développement décimal illimité est hors programme.

Topologie de R

Définition des voisinages d'un point, des parties ouvertes, des parties fermées. Définition d'un point adhérent à une partie *A*, de l'adhérence de *A*. Définition d'un point intérieur à une partie *A*, de l'intérieur de *A*.	Réunions et intersections de parties ouvertes, de parties fermées. Aucune autre connaissance spécifique sur ces notions n'est exigible des étudiants.

Groupe $\mathbf{R}^*_+$

Définition du groupe multiplicatif $\mathbf{R}^*_+$ des nombres réels strictement positifs. Isomorphisme $x \to e^x$ (également noté $x \to \exp x$) de **R** sur $\mathbf{R}^*_+$; isomorphisme réciproque $y \to \ln y$.	La continuité, la dérivabilité et les variations des fonctions exponentielle et logarithme népérien sont supposées connues, ainsi que leurs équations fonctionnelles.

Corps des nombres complexes

Corps **C** des nombres complexes, structure de **R**-algèbre. Parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe, conjugaison dans **C**. Module d'un nombre complexe, module d'un produit, d'un quotient. Inégalité triangulaire ; interprétation en termes de distances.	Aucune connaissance sur la construction du corps **C** n'est exigible des étudiants. Notations $\mathrm{Re}\,z, \mathrm{Im}\,z, \bar{z}$. Notation $\|z\|$, relation $\|z\|^2 = z\bar{z}$. Interprétation de $\|z\|$, de $\|z-a\|$; disque ouvert (fermé) de centre *a*. Si $\|u\| \leq k < 1$, alors $1 - k \leq \|1+u\| \leq 1 + k$

2. **Suites de nombres réels ou complexes**

Suites de nombres réels ou complexes

Opération sur les suites de nombres réels ou complexes : structure d'algèbre. Algèbre des suites bornées. Parties réelle, imaginaire et conjugué d'une suite de nombres complexes	Pour la présentation du cour le programme se place dans le cadre des suites indexées par **N.** On effectuera une brève extension aux autres cas usuels.

Limite d'une suite

Limite d'une suite, convergence et divergence. Lorsque $a \in$ **C**, la relation $u_n \to a$ équivaut à $u_n - a \to 0$. Toute suite convergente est bornée. Espace vectoriel des suites convergeant vers ; produit d'une suite bornée et d'une suite convergeant vers 0. Opérations algébriques sur les limites. Suites extraites d'une suite. Toute suite extraite d'une suite convergeant vers *a*, converge vers *a*. Une suite de nombres complexes converge si et seulement si ses parties réelles et imaginaires convergent.	Si $\lvert u_n \rvert \leq \alpha_n$ et $\alpha_n \to 0$, alors $u_n \to 0$. Application à la divergence d'une suite bornée : il suffit d'exhiber deux suites extraites convergeant vers deux limites différentes. La notion de valeur d'adhérence d'une suite est hors programme.

Cas des suites réelles

Relation d'ordre. Suites majorées, minorées. Suites monotones, strictement monotones. Compatibilité du passage à la limite avec la	Si $v_n \leq u_n \leq w_n$, et si $v_n \to a$ et $w_n \to a$, alors $u_n \to a$.

relation d'ordre. Toute suite de nombres réels convergeant vers un nombre réel strictement positif est minorée, à partir d'un certain rang, par un nombre réel strictement positif.	Si $v_n \le u_n$, et $v_n \to +\infty$, alors $u_n \to +\infty$

Théorème d'existence de limite

Définition d'une suite de Cauchy. Toute suite convergente est de Cauchy. Toute suite de Cauchy est convergente. Toute suite réelle $(u_n)_n$ croissante et majorée, est convergente, et $\lim_n u_n = \sup_n u_n$ Théorème des segments emboîtés. Théorème de Bolzano-Weierstrass : de toute suite bornée de nombres réels ou complexes, on peut extraire une sous suite convergente.	Extension au cas d'une suite croissante non majorée. Les étudiants doivent connaître et savoir exploiter la notion de suite dichotomique d'intervalles ainsi que celle de suites adjacentes.

Relations de comparaison

Etant donnée une suite (α_n) de nombre réels non nuls, définition d'une suite (u_n) dominée par (α_n), négligeable devant (α_n). Définition de l'équivalence de deux suites (u_n) et (v_n) de nombres réels non nuls. Equivalent d'un produit, d'un quotient.	Notations u_n=O(α_n), u_n=o(α_n). Caractérisation à l'aide du quotient $\frac{u_n}{\alpha_n}$. Notation $u_n \sim v_n$. Caractérisation à l'aide du quotient $\frac{u_n}{v_n}$.

Si $u_n = \alpha_n + w_n$, ou w_n est négligeable devant α_n, alors $u_n \sim v_n$. Comparaison logarithmique : Si (u_n) et (v_n) sont deux suites de nombres réels strictement positifs et si, à partir d'un certain rang, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$, alors $u_n = O(v_n)$. Comparaison des suites de référence : $a^n, n^\alpha, (\ln n)^\beta, n!$ où $a>0$, $\alpha, \beta \in$ **R**. Caractérisation séquentielle des points adhérents, des parties fermées.	Si $u_n \sim v_n$, alors , à partir d'un certain rang, u_n et v_n ont le même signe. Les développements asymptotiques sont à étudier sur quelques exemples simples. Toute étude systématique est exclue : en particulier, la notion générale d'échelle de comparaison est hors programme.

3. **Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes**

a. Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes

Opération sur les fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes : structure d'algèbre. Algèbre des fonctions bornées. Parties réelle, imaginaire et conjugué d'une fonction. Conjugaison. Sous espace vectoriel des fonctions paires, des fonctions impaires. Algèbre des fonctions T-périodiques. Espace vectoriel de fonctions lipschitziennes.	Les fonctions paires et les fonctions impaires constituent deux sous espaces supplémentaires. Si *f* est lipschitzienne sur $[a,b]$ et sur $[b,c]$ alors elle l'est sur $[a,c]$.

Composée de fonctions lipschitziennes.	

Etude locale d'une fonction

Limite d'une fonction en un point, continuité en un point. Lorsque $b \in \mathbf{C}$, la relation $f(x) \to b$ équivaut à $f(x) - b \to 0$. Lorsque $a \in \mathbf{R}$, la relation $f(x) \to b$ lorsque $x \to a$ équivaut à $f(a+h) \to b$ lorsque $h \to 0$.	Lorsque $a \in I$, dire que f admet une limite dans **K** en a équivaut à la continuité de f en a. Lorsque $a \notin I$, f admet une limite dans **K** en a si et seulement si f se prolonge par continuité en a.
Limite à gauche, limite à droite. Continuité à gauche, continuité à droite.	Les limites à gauche (ou à droite) sont définies par restriction de f à $I \cap \left]-\infty, a\right[$ (ou $I \cap \left]a, +\infty\right[$.
Toute fonction admettant une limite en un point est bornée au voisinage de ce point Espace vectoriel des fonctions tendant vers 0 en un point a ; produit d'une fonction bornée au voisinage de a et d'une fonction tendant vers 0 en a . Opérations algébriques sur les limites ; limite d'une fonction composée, image d'une suite convergente. Caractérisation séquentielle de l'existence d'une limite et de la continuité d'une fonction en un point. Une fonction à valeurs complexes admet une limite en a si et seulement si ses parties réelles et imaginaires admettent des limites en a ; dans ce cas $\lim_a f = \lim_a Ref + i \lim_a \mathrm{Im} f$	Si $\lvert f(x) \rvert \leq g(x)$ et $g(x) \to 0$, alors $f(x) \to 0$

Cas des fonctions réelles

Relation d'ordre. Fonctions majorées, minorées. Définition d'un extremum, d'un extremum local. Définition de la borne supérieure (inférieure) d'une fonction. Fonctions monotones, strictement monotones ; composition. Compatibilité du passage à la limite avec la relation d'ordre. Toute fonction réelle admettant en *a* une limite strictement positive est minorée, au voisinage de a, par un nombre réel strictement positif.	Définitions de $\sup(f,g)$, $\inf(f,g)$, f^+, f^-. Relations $f = f^+ - f^-$ et $\lvert f\rvert = f^+ + f^-$. Notations $\max_I f$ et $\max_{x\in I} f(x)$. Notations $\sup_I f$ et $\sup_{x\in I} f(x)$. Si $g(x) \le f(x) \le h(x)$, et si $g(x)\to b$ et $h(x)\to b$, alors $f(x)\to b$. Si $g(x)\le f(x)$, et $g(x)\to +\infty$, alors $f(x)\to +\infty$.

Relations de comparaison

Etant donnés un point *a* (appartenant à *I* ou extrémité de *I*) et une fonction φ à valeurs réelles et ne s'annulant pas sur *I* privé de *a*, définition d'une fonction *f* à valeurs réelles ou complexes dominée par φ, négligeable devant φ. Définition de l'équivalence au voisinage de *a* de deux fonctions *f* et *g* à valeurs réelles ne s'annulant pas sur *I* privé de *a*,. Equivalent d'un produit, d'un quotient. Si $f = \varphi + h$, ou h est négligeable devant φ, alors $f \sim \varphi$ Comparaison, lorsque $x \to +\infty$, des fonctions :	Notations $f = O(\varphi)$, $f = o(\varphi)$ Caractérisation à l'aide du quotient $\frac{f}{\varphi}$. Notation $f \sim g$. Caractérisation à l'aide du quotient $\frac{f}{g}$. Si $f \sim g$, alors , au voisinage de *a*, *f* et *g* ont le même signe.

$x \to e^{\alpha x}$, $x \to x^{\beta}$, $x \to (\ln x)^{\gamma}$ Comparaison, lorsque $x \to 0$, des fonctions : $x \to x^{\beta}$, $x \to (\ln x)^{\gamma}$	

Fonctions continues sur un intervalle

Opérations algébriques sur les applications continues : algèbre *C(I)* des fonctions continues sur *I* à valeurs réelles ou complexes. Composée de deux applications continues. Restriction d'une application continue à un intervalle *J* contenu dans *I*. Prolongement par continuité en une borne de *I*. Image d'un intervalle par une fonction continue. Image d'un segment par une fonction continue (théorème des valeurs intermédiaires). Continuité de la fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone. Définition de la continuité uniforme. Continuité uniforme d'une fonction continue sur un segment.	Une fonction à valeurs complexes est continue si et seulement si ses parties réelles et imaginaires le sont. Si *f* est à valeurs réelle et continue, $\|f\|, f^+, f^-$ le sont. Si *f* est continue sur $[a,b]$et sur $[b,c]$alors elle l'est sur $[a,c]$. La démonstration de ces deux résultats n'est pas exigible des étudiants. Comparaison des représentations graphiques d'une bijection et de la bijection réciproque. La démonstration de ce résultat n'est pas exigible des étudiants. Toute étude systématique de la continuité uniforme est exclue.

I. FONCTIONS D'UNE VARIABLE REELLE : DERIVATION ET INTEGRATION

1. **Dérivation des fonctions à valeurs réelles ou complexes**

a. **Dérivée en un point, fonctions dérivée**

Dérivabilité en un point : dérivée, dérivée à gauche, dérivée à droite. Extremum local pour une fonction dérivable réelle. Dérivabilité sur un intervalle, application dérivée. Opération sur les dérivées linéarité, produit, quotient, fonctions composées, fonctions réciproques. Une fonction à valeurs complexes est dérivable si et seulement si ses parties réelle et imaginaire le sont. Algèbre $C^k(I)$ des applications de classe C^k sur I à valeurs réelles ou complexes. Dérivée $n^{ème}$ d'un produit (formule de Leibniz).	Les étudiants doivent connaître et savoir exploiter l'interprétation graphique et cinématique de la notion de dérivée en un point. Notation f', Df, $\frac{df}{dx}$. Dans ces conditions $D(\overline{f}) = \overline{Df}$, $Df = D(Re f) + iD(\mathrm{Im}\, f)$. Notations $f^{(k)}$, $D^k f$, et $\frac{d^k f}{dx^k}$.

Etude globale des fonctions dérivables réelles

Théorème de Rolle, égalité des accroissements finis. Inégalité des accroissements finis : • Si $m \leq f' \leq M$, alors $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$ • Si $\lvert f' \rvert \leq k$	Pour le théorème de Rolle, l'égalité et l'inégalité des accroissements finis, ainsi que pour la caractérisation des fonctions monotones, on suppose f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Les étudiants doivent connaître l'interprétation graphique et cinématique de ces résultats.

, alors *f* est *k*-lipschitzienne. Caractérisation des fonctions constantes, monotones et strictement monotones parmi les fonctions dérivables. Si *f* est continue sur $[a,b]$, de classe C^1 sur $]a,b]$ et si *f'* a une limite finie en *a*, alors *f* est de classe C^1 sur $[a,b]$. Formule de Taylor-Lagrange (ou type accroissement fini).	Brève extension au cas d'une limite infinie.

Développements limités

Développement limité à l'ordre *n* d'une fonction *f* au voisinage d'un point. Opérations algébriques sur les développements limités : Somme, produit ; développement limité de $u \to \frac{1}{1-u}$, application au quotient. Existence d'un développement limité à l'ordre *k* pour une application de classe C^k : formule de Taylor-Young.	Les étudiants doivent savoir déterminer sur des exemples simples le développement limité d'une fonction composée. Aucun résultat général sur ce point n'est pas exigible des étudiants. Les développements asymptotiques sont à étudier sur quelques exemples simples. Toute étude systématique est exclue ; en particulier la notion générale d'échelle de comparaison est hors programme. Il convient de donner un exemple où *f* admet un développement limité à l'ordre 2 en un point sans être deux fois dérivable en ce pont.

Fonctions convexes

Dans ce paragraphe les fonctions considérées sont à valeurs réelles.

Définition, interprétation graphique (tout sous-	Inégalité de convexité : si $\lambda_j \geq 0$ et $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$

arc est sous sa corde). Caractérisation des fonctions convexes par la convexité de la partie du plan située au-dessus de la courbe, par la croissance des pentes des sécantes dont on fixe une extrémité. Si *f* est de classe C^1 , *f* est convexe si et seulement si *f'* est croissante. La courbe est alors située au dessus de chacune de ses tangentes.	alors $$f\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j a_j\right)\leq\sum_{j=1}^{n}\lambda_j f(a_j)$$. L'étude de la continuité et de la dérivabilité des fonctions convexes est hors programme.

1. **Intégration sur un segment**

a. **Fonction continues par morceaux**

Définition d'une fonction φ en escalier sur $[a,b]$, d'une subdivision de $[a,b]$adaptée à φ . Algèbre des fonctions en escalier sur un segment. Algèbre des fonctions continue par morceaux sur un segment.	Algèbre non unitaire des fonctions en escalier sur **R** (par définition, ces fonctions sont nulles en dehors d'un segment).

Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Dans ce paragraphe, les fonctions considérées sont à valeurs réelles.

Intégrale d'une fonction en escalier sur un segment. Linéarité, croissance. Approximation des fonctions continues par morceaux sur un segment par des fonctions en escalier : étant donnée une fonction *f* continue par morceaux sur $[a,b]$, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il	Il convient d'interpréter graphiquement l'intégrale d'une fonction à valeurs positives en termes d'aire. Aucune difficulté théorique ne doit être soulevée sur la notion d'aire.

<table>
<tr><td>existe des fonctions φ et ψ en escalier sur $[a,b]$ telles que $\varphi \le f \le \psi$ et $\psi - \varphi \le \varepsilon$.

Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment. Notations $\int_J f$, $\int_{[a,b]}$ .Linéarité.

Croissance. Inégalité $\left|\int_J f\right| \le \int_J |f|$.

Additivité par rapport à l'intervalle d'intégration. Invariance de l'intégrale par translation.

Valeur moyenne d'une fonction.

Inégalité de la moyenne

$$\left|\int_{[a,b]} fg\right| \le \sup_{[a,b]}|f| \int_{[a,b]}|g|$$</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>En particulier

$$\left|\int_{[a,b]} f\right| \le (b-a)\sup_{[a,b]}|f|$$</td></tr>
<tr><td>Une fonction continue et à valeurs positives sur un segment sur $[a,b]$ est nulle si et seulement si son intégrale est nulle.

Produit scalaire $(f,g) \to \int_I fg$ sur l'espace vectoriel C(I) ; Inégalité de Cauchy- Schwarz.

Approximation de l'intégrale d'une application f continue sur un segment $[a,b]$ par une somme de Riemann associée à une subdivision S de $[a,b]$.</td><td>Toute autre formule ou égalité dite de la moyenne est hors programme.</td></tr>
<tr><td>Cas où f est lipschitzienne sur $[a,b]$.

Définition de $\int_a^b f(t)dt$, où a et b appartiennent à I .</td><td>Pour tout nombre réel, il existe un nombre réel $\eta > 0$ tel que, pour toute subdivision S de $[a,b]$ de pas inférieure ou égal à η

$$\left|\int_{[a,b]} f - R_S(f)\right| \le \varepsilon$$.</td></tr>
</table>

Intégrale d'une fonction complexe

Une fonction à valeurs complexes est continue par morceaux sur un segment si et seulement ses parties réelle et imaginaire le sont. Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$. Inégalité $\left\lvert\int_I f\right\rvert \leq \int_I \lvert f\rvert$. Extension des propriétés vues pour les fonctions à valeurs réelles.	Par définition $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} Ref + i\int_{[a,b]} \mathrm{Im}\, f$

1. **Intégration et dérivation**

a. **Primitives et intégrale d'une fonction continue**

Définition d'une primitive *g* d'une application *f* continue sur *I*. **Deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.** **Théorème fondamental : étant donnée une application *f* continue sur *I* et un point *a* de *I*,** • **L'application $x \rightarrow \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de *f* sur *I* qui s'annule en *a*** • **Pour toute primitive *h* de *f* sur *I*,** $\int_a^x f(t)dt = h(x) - h(a)$. **Développement limité d'une primitive, d'une dérivée.** **Formule d'intégration par parties pour des**	**Il convient de montrer sur des exemples que cette définition ne peut être étendue sans changement au cas des fonctions continue par morceaux sur.** **Pour toute application *f* de classe C^1 sur *I*,** $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt$

fonctions de C^1 sur *I*. **Changement de variable : étant donnée une fonction *f* continue sur *I* à valeurs réelles ou complexes et une fonction φ à valeurs dans *I* et de classe C^1 sur $[\alpha, \beta]$,** $$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u))\varphi'(u)du$$.	Il convient de mettre en valeurs l'intérêt de changements de variables affines, notamment pour exploiter la périodicité et les symétries, ou pour se ramener, par paramétrage du segment $[a, b]$, au cas où l'intervalle d'intégration est $[0,1]$ ou $[-1,1]$.

Formules de Taylor

Pour une fonction *f* de classe C^{k+1} sur *I*, formule de Taylor à l'ordre *k* en un point *a* de *I* . **Expression intégrale du reste R_k .** **Majoration du reste R_k (inégalité de Taylor-Lagrange)**	**Décomposition $f(x) = T_k(x) + R_k(x)$, où** $$T_k(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{(x-a)^n}{n!} D^n f(a)$$.

Approximation d'une intégrale par la méthode des trapèzes

Etant donnée une fonction *f* de classe C^k sur $[a,b]$ et une subdivision $S = (a_0, \dots a_n)$ de $[a, b]$ à pas constant, approximation de $\int_a^b f(t)dt$ par $$I_n(f) = \frac{b-a}{2n} \sum_{j=0}^{n-1} \left[f(a_j) + f(a_{j+1}) \right]$$ La majoration $$\left\| \int_a^b f(t)dt - I_n(f) \right\| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2(f)$$ Algorithme d'approximation d'une intégrale par la méthode des trapèzes.	Cette méthode consiste à approcher *f* sur chaque intervalle $[\alpha, \beta]$ de la subdivision par la fonction affine φ qui coïncide avec *f* en α et β, et à exploiter la majoration suivante valable pour tout élément $t \in [\alpha, \beta]$, $$\|f(t) - \varphi(t)\| \le \frac{(t-\alpha)(\beta-t)}{2} M_2(f)$$ Il convient de souligner l'intérêt des subdivisions dichotomiques.

1. **Equations différentielles**

a. **Solutions d'une équation différentielle**

Définition d'une solution sur *I* d'une équation différentielle $y' = f(x,y)$, d'une solution satisfaisant à une condition initiale donnée. Interprétation graphique.	Le théorème de Cauchy-Lipschitz est hors programme.

Equations linéaires d'ordre 1

Equation $a(t)x'+b(t)x = c(t)$ où *a*, *b* et *c* désignent des applications continues à valeurs réelles ou complexes. Equation sans second membre associée. Description de l'ensemble des solutions.	Existence et unicité de la solution satisfaisant à une condition initiale donnée sur un intervalle sur lequel *a* ne s'annule pas. Structure de l'espace des solutions de l'équation sans second membre associée. Expression des solutions sous forme intégrale. du problème de Cauchy.

Equations linéaires du second ordre à coefficients constants

Equation $ax''+bx'+x = f(t)$ où *a, b, c* sont des nombres complexes, $a \neq 0$ et *f* une somme de fonctions de type $t \rightarrow P(t)e^{\alpha t}$, où $\alpha \in$ ***C*** et $P \in$ ***C***$[X]$.	Existence et unicité d'une solution satisfaisant à une condition initiale donnée. Structure de l'espace des solutions de l'équation homogène associée.

1. **Fonctions usuelles**

Les fonctions étudiées dans ce chapitre sont à utiliser comme exemples pour illustrer les notions des chapitres précédents.

a. **Fonctions exponentielles, logarithmes, puissances**

Fonction exponentielle réelle, fonctions logarithmes, fonctions puissance. Fonctions hyperboliques : ch, sh et th.	Les étudiants doivent connaître les dérivées, les variations, et les représentations graphiques de ces fonctions. En ce qui concerne la trigonométrie hyperbolique, la seule connaissance exigible des étudiants est la relation $\mathrm{ch}^2 t - \mathrm{sh}^2 t = 1$ et son interprétation géométrique. Les fonctions hyperboliques réciproques sont hors programme.

Fonctions circulaires

Fonctions circulaires $\cos$, $\sin$, et $\tan$. Définition et dérivation des fonctions circulaires réciproques : $\arccos$, $\arcsin$, $\arctan$.	Les étudiants doivent connaître les dérivées, les variations, et les représentations graphiques de ces fonctions. Aucune autre connaissance sur les fonctions circulaires réciproques n'est exigible des étudiants.

Fonctions exponentielles complexe

Dérivation de $t \to e^{\alpha t}$ où $\alpha \in$ **C** ; dérivation de $t \to e^{\varphi(t)}$, où φ est à valeurs complexes.	Si $z = x + iy$, où $x, y \in$ **R**, $e^z = e^x e^{iy}$.

Primitives des fonctions usuelles

Primitives de $t \to (t-a)^n$, $a \in$ ***C***, $n \in$ **Z**. Primitives de $t \to P(t)e^{\alpha t}$ où $\alpha \in$ **C** et $P \in$ **C**$[X]$. Tableau des primitives des fonctions usuelles.	Lorsque *n* = -1, on se ramène à l'intégration de la parie réelle et de la partie imaginaire ; la notion de fonction logarithme complexe est hors programme.

Développement limité des fonctions usuelles

Développement limité à l'origine des fonctions $t \to e^{\alpha t}$, $\alpha \in$ **C** , $t \to (1+t)^{a}$, $a \in$**R**.	Les étudiants doivent savoir en déduire les autres développements limités usuels.

Caractérisation des fonctions usuelles

Caractérisation de la fonction $t \to e^{\alpha t}$, $\alpha \in$ **C** , par l'équation différentielle $y' = \alpha y$ et la condition initiale $y(0) = 1$, de la fonction $t \to t^{a}$, $a \in$**R**, par l'équation différentielle $ty' = ay$ et la condition initiale $y(1) = 1$. Caractérisation des fonctions linéaires, exponentielles réelles, logarithmes, puissances, et $t \to e^{\alpha t}$, $\alpha \in$ **C** , par la continuité et leur équation fonctionnelle.	

1. **Travaux pratiques**

Exemple d'emploi du calcul différentiel et intégral pour l'étude globale des fonctions : variation, recherche de zéros et du signe d'une fonction, obtention de majorations et minorations de suites et de fonctions, recherche d'extremums, inégalités de convexité. **$ Exemples d'algorithmes d'approximation d'une solution d'une équation numérique et de comparaison de leurs performances.** **$ Exemples de calculs de primitives et d'intégrales.**	**Les étudiants doivent connaître les méthodes de dichotomie, d'itération et de Newton, et savoir comparer leurs performances sur les exemples étudiés.** **Les étudiants doivent savoir calculer une**

$ Exemples d'algorithmes de calcul approché d'intégrales et de comparaison de leurs performances. **Exemples d'étude d'équations différentielles : équations linéaires du premier ordre, équations linéaires du second ordre à coefficients constants, équations à variables séparables.**	**primitive d'une fonction rationnelle n'ayant que des pôles simples ou doubles. En dehors de ce cas, des indications sur la méthode à suivre doivent être fournies.** **La démarche consiste à subdiviser l'intervalle d'intégration e approcher, sur chaque sous intervalle, la fonction à intégrer par une fonction polynomiale.** **Il convient notamment d'exploiter des problèmes issus de la géométrie et des autres disciplines scientifiques.**

I. NOTION SUR LES FONCTIONS DE DEUX VARIABLES REELES

1. Espace $\mathbf{R}^2$, fonctions continues

a. Espace $\mathbf{R}^2$

Normes sur $\mathbf{R}^2$: N_1, N_2 et N_∞. Distance associée. N_1, N_2 et N_∞ sont équivalentes. Définition des parties bornées de $\mathbf{R}^2$.	L'étude générale des normes sur $\mathbf{R}^2$ est hors programme.
Définition des parties ouvertes et des parties fermées de $\mathbf{R}^2$.	Les opérations sur les ouverts et les fermés, ainsi que les notions de voisinage, d'intérieur et d'adhérence d'une partie sont hors programme.
Suite de $\mathbf{R}^2$. Suite convergente, suite de Cauchy	
Définition séquentielle d'un point adhérent à une partie *A* de $\mathbf{R}^2$. Caractérisation séquentielle des parties fermées.	
Théorème de Bolzano-Weierstrass : de toute suite bornée d'éléments de $\mathbf{R}^2$, on peut extraire une sous suite convergente.	La démonstration de ce théorème est hors programme.

Fonctions continue de deux variables

Algèbre des fonctions définies sur *A* et à valeurs réelles. Applications partielles associées à une telle fonction. Espace vectoriel des fonctions lipschitziennes. Les applications coordonnées sont lipschitziennes dans le rapport 1.	Si *f* est définie sur un rectangle $[a,b]\times[c,d]$ et si les applications partielles $x_1 \to f(x_1,x_2)$ et $x_2 \to f(x_1,x_2)$ sont lipschitziennes dans les rapports respectifs k_1 et k_2, alors *f* est lipschitzienne dans le rapport $k = k_1 + k_2$ Pour la notion de limite, on suppose que *a* est adhérent à *A*.
Limite et continuité en un point *a* d'une fonction définie sur *A* et à valeurs réelles. Caractérisation séquentielle de l'existence de limite et de la continuité d'une fonction en un point.	Il convient de montrer à l'aide d'un exemple simple que la continuité des applications partielles n'implique pas la continuité, mais l'étude de la continuité partielle est hors programme.
Algèbre des fonctions continues sur *A* et à valeurs réelles. Extension des notions de limite et de continuité à une application de *A* dans $\mathbf{R}^2$: caractérisation à l'aide des coordonnées. Continuité d'une application composée. Toute fonction continue sur une partie fermée bornée est bornée et atteint ses bornes. Si *f* est une fonction continue sur $\mathbf{R}^2$ et à valeurs réelles, alors pour tout nombre réel α, l'ensemble des points $(x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2$ tels que $f(x_1,x_2) \geq \alpha$, ou tels que $f(x_1,x_2) = \alpha$ est un fermé de $\mathbf{R}^2$; de même l'ensemble des points	Il convient de mettre en valeur le fait qu'une partie de $\mathbf{R}^2$ définie par des inégalités larges (strictes) est fermée (ouverte). En revanche, la caractérisation de la continuité par image réciproque d'ouverts ou de fermés est hors programme.

$(x_1, x_2) \in$ **R**^{2} tels que $f(x_1, x_2) > \alpha$ est un ouvert de **R**^{2}.	

1. **Fonctions de deux variables à valeurs réelles : calcul différentiel**

a. **Dérivées partielles premières**

Définition de la dérivée de *f* en un point de *U* selon un vecteur *h*, notée $D_h f(a)$. Définition des dérivées partielles, notées $D_j f(a)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$.	Il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que, pour tout élément $t \in [-\delta, \delta]$, $a + th$ appartienne à *U* : on pose alors $\varphi_h(t) = f(a + th)$. Si φ_h est dérivable à l'origine, on dit que *f* admet une dérivée en *a* selon le vecteur *h*, et l'on pose $D_h f(a) = \varphi'_h(0)$.
Définition des fonctions de classe C^1 sur *U* : pour tout vecteur *h*, $x \to D_h f(x)$ est continue sur *U*. Théorème fondamental : si les dérivées partielles sont continues sur *U*, alors *f* admet, en tout point *a* de *U*, un développement limité à l'ordre un, ainsi qu'une dérivée selon tout vecteur *h*, et $$D_h f(a) = h_1 D_1 f(a) + h_2 D_2 f(a)$$ En particulier, *f* est de classe C^1 sur *U* et l'application $h \to D_h f(a)$ est une forme linéaire. Le gradient de *f* est défini par la relation $$D_h f(a) = \left(grad f(a) \middle\| h\right).$$ Algèbre $C^1(U)$ des fonctions de classe C^1 sur *U*.	La démonstration de ce résultat n'est pas exigible des étudiants. En vue de l'enseignement des autres disciplines scientifiques, il convient de donner la notation différentielle df , mais, en mathématiques, aucune connaissance n'est exigible des étudiants. Application au calcul des dérivées partielles

Dérivée d'une fonction composée de la forme $f o \varphi$, où φ est une fonction de classe C^1 sur un intervalle *I* et à valeurs dans *U*. En un point de *U* où une fonction *f* de classe C^1 sur *U* présente un extremum local, ses dérivées partielles sont nulles.	d'une fonction composée de la forme $f o \varphi_1$, où φ_1 est une fonction de classe C^1 sur un ouvert *V* de **R**^{2} et à valeurs dans *U*.

Dérivées partielles d'ordre $k \geq 2$

Théorème de Schwarz pour une fonction de classe C^2 sur *U*. Algèbre $C^k(U)$ des fonctions de classe C^k sur *U*. Les opérateurs différentiels D_h, et en particulier D_1 et D_2 sont des applications linéaires de $C^k(U)$ dans $C^{k-1}(U)$, où $1 \leq k < +\infty$.	La démonstration du théorème de Schwarz, ainsi que tout énoncé concernant les formules de Taylor ou les conditions suffisantes d'existence d'extremums, sont hors programme.

Coordonnées polaires

Repère polaire $(\vec{u}, \vec{v})$ du plan euclidien **R**^{2} défini, pour tout nombre réel θ, par : $\vec{u}(\theta) = \cos(\theta)\vec{e}_1 + \sin(\theta)\vec{e}_2$ $\vec{v}(\theta) = -\sin(\theta)\vec{e}_1 + \cos(\theta)\vec{e}_2$ où $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est la base canonique de **R**^{2}. Coordonnées polaires d'un point de **R**^{2}.	Relations $\frac{d\vec{u}}{d\theta} = \vec{v}$, $\frac{d\vec{v}}{d\theta} = -\vec{u}$. Expression des coordonnées du gradient d'une fonction à valeur réelles *f* de classe C^1 en fonction des dérivées partielles de la fonction $(\rho, \theta) \rightarrow F(\rho, \theta) = f(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta))$

1. **Fonctions de deux variables réelles : calcul intégral**

Définition de l'intégrale double d'une fonction *f* et continue sur un rectangle $R=[a,b]\times[c,d]$ et à valeurs réelles. Notation $\iint_R f = \iint_R f(x,y)dxdy$. Linéarité, croissance, invariance par translation. Additivité par rapport au domaine d'intégration. Décomposition de l'intégrale double en produit d'intégrale simple lorsque $f(x,y)=g(x)h(y)$. Théorème de Fubini : expression de l'intégrale double à l'aide de deux intégrations successives. Changement de variables affine, intégration sur un parallélogramme. Passage en coordonnées polaires. Intégration sur un disque, une couronne ou un secteur angulaire.	Brève extension au cas d'une fonction continue sur une partie *A* fermée bornée de $\mathbf{R}^2$; extension du théorème de Fubini lorsque *A* est constituée des points $(x,y)\in \mathbf{R}^2$ tels que $a\le x\le b$ et $\varphi(x)\le y\le \psi(x)$ où φ et ψ sont des fonctions continues sur $[a,b]$. Toute démonstration de ce cas plus général est hors programme. La démonstration de ces résultats, ainsi que tout énoncé général concernant les changements de variables, est hors programme.

2. **Travaux pratiques**

Exemples de calcul et d'emploi de dérivées partielles. Exemples de recherche d'extremums. Exemples de calculs d'intégrales doubles : exemples d'applications des intégrales simples et doubles au calcul d'aires planes, de volumes, de masses, de centres et de moments d'inertie.	

I. GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

1. **Courbes du plan**

a. **Courbes paramétrées**

Courbes paramétrées (ou arcs paramétrés) de classe C^k ; interprétation cinématique : mouvement, vitesse, accélération. Etant données deux fonctions *f* et *g* de classe C^1 à valeurs dans $\mathbf{R}^2$, dérivation de $(f\|g)$, $\|f\|_2$ et de $\mathrm{Det}(f,g)$. Effet d'un changement de paramétrage, paramétrage admissible. Trajectoire d'un mouvement, orientation ; point régulier, birégulier.	En vue de l'enseignement de la mécanique, il convient de donner la caractérisation d'un mouvement uniforme, d'un mouvement rectiligne, d'un mouvement ç accélération centrale. En mathématiques, aucune connaissance spécifique sur ces points n'est exigible des étudiants. Les changements de paramétrage sont supposés de classe C^1 ainsi que leurs applications réciproques.

b.

Etude locale d'un arc orienté Γ de classe C^k

Définition des demi-tangentes en un point *A* de Γ (le vecteur unitaire associé à $\overrightarrow{AM}$ admet une limite), de la tangente en un point *A*. Existence d'une tangente en un point régulier ; vecteur unitaire $\vec{T}$ de la tangente en ce point. Cas d'un point *A* où l'un au moins des vecteurs dérivés successifs est non nul. Position locale de Γ par rapport à la tangente en un point *A* birégulier (concavité) en un point *A* non birégulier (inflexions, rebroussements). Branches infinies ; directions asymptotiques, asymptotes. Position locale de la courbe par rapport à l'une de ses asymptotes.	L'étude locale en un point où tous les vecteurs dérivés successifs sont nuls est hors programme. Il convient d'abord d'étudier la position locale de Γ par rapport à une droite *D* passant par *A* dirigée par un vecteur n'appartenant pas à la direction de la tangente. Cette étude porte seulement sur des exemples ;

	aucun énoncé général n'est exigible des étudiants.

Modes de définition d'une courbe plane

Courbe définie par une représentation cartésienne $x \to y = \varphi(x)$ ou $y \to x = \psi(y)$ où φ et ψ sont de classe C^k. Courbe Γ définie par une représentation paramétrique $t \to \overrightarrow{OM}(t) = f(t)$. Courbe définie par une équation $F(x,y)=0$, où *F* est une application de classe C^k, où $1 \le k \le +\infty$, d'un ouvert *U* de $\mathbf{R}^2$ dans **R** dont le gradient en tout point de *U* est non nul. Vecteurs directeurs de la tangente et de la normale en un point d'une ligne de niveau $F(x,y)=\lambda$. Représentation polaire d'une courbe Γ définie par une représentation paramétrique *f* de classe C^k, où $1 \le k \le +\infty$, d'un intervalle *I* de **R** dans $\mathbf{R}^2$ privé de 0 : il existe un couple (ρ,θ) de	Etant donné un pont régulier $M(t_0)$ de Γ, existence locale d'une représentation cartésienne de Γ au voisinage de t_0. L'énoncé du théorème des fonctions implicites est donné sous la forme suivante : En un point (a,b) de *U* tel que $F(a,b)=0$ et que, par exemple, $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$, il existe des intervalles ouverts *J* et *K* de centres respectifs *a* et *b* tels que $J \times K$ soit contenu dans *U* et satisfaisant à la condition suivante : il existe une fonction φ de classe C^k sur *J* à valeurs dans *K* et une seule, telle que, pour tout point (x,y) de $J \times K$, les relations $F(x,y)=0$ et $y=\varphi(x)$ soient équivalentes. La démonstration de ce théorème est hors programme. **Calcul des coordonnées de la vitesse et de l'accélération dans le repère polaire.** **La démonstration de ce résultat est hors programme**

fonctions de classe C^k sur *I* tel que, pour tout élément t de *I*, $f(t)=\rho(t)\vec{u}(\theta(t))$, où $(\vec{u},\vec{v})$ est le repère polaire. Courbe définie par une équation polaire $\theta \to \rho(\theta)$ où ρ est de classe C^k et à valeurs réelles. Expression dans le repère polaire de vecteurs directeurs de la tangente et de la normale. Equation polaire d'un cercle passant par *O*, d'une conique de foyer *O*.	Les seules connaissances spécifiques exigibles des étudiants concernant l'étude des courbes définies par une équation polaire sont celles indiquées ci-contre.

Propriétés métriques des courbes planes paramétrées

Pour un arc orienté Γ, régulier à l'ordre 1, repère de Frenet $(\vec{T},\vec{N})$, abscisse curviligne. L'abscisse curviligne est un paramétrage admissible ; représentation normale d'un arc. Longueur d'un arc. Si *f* est de classe C^k sur *I*, où $2 \le k < +\infty$, existence d'une fonction α de classe C^{k-1} sur *I* telle que, pour tout $t \in I$, $\vec{T}(t)=\cos\alpha(t)\vec{e}_1+\sin\alpha(t)\vec{e}_2$. Définition de la courbure $\gamma=\frac{d\alpha}{ds}$; caractérisation des points biréguliers. Relations $\frac{d\vec{T}}{ds}=\gamma\vec{N}$, $\frac{d\vec{N}}{ds}=-\gamma.\vec{T}$	Par définition une abscisse curviligne est une fonction *s* de classe C^1 sur *I* telle que $s'(t)=\\|f'(t)\\|_2$. La longueur d'un arc est définie à l'aide de l'abscisse curviligne : toute définition géométrique d'une telle longueur est hors programme. Relations $\frac{df}{ds}=\vec{T}$, $\frac{dx}{ds}=\cos\alpha$ et $\frac{dy}{ds}=\sin\alpha$. Aucune connaissance spécifique sur le centre de courbure, le cercle osculateur, les développées et les développantes n'est exigible des étudiants.

Dans le cas d'un arc Γ birégulier, α est un paramétrage admissible. Rayon de courbure. Calcul des coordonnées de la vitesse et de l'accélération dans le repère de Frenet.	Relations $\frac{d\vec{T}}{d\alpha} = \vec{N}$, $\frac{d\vec{N}}{d\alpha} = -\vec{T}$