

Algèbre Et Géométrie

Deuxième Année

ALGEBRE GENERALE

Groupes

Anneaux et corps

Travaux pratiques

ALGEBRE LINEAIRE ET GEOMETRIE AFFINE

1. Espaces vectoriels, applications linéaires

2. Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques

Travaux pratiques

Réduction des endomorphismes

1. Sous-espaces stables, polynômes d'un endomorphisme

2. Réduction d'un endomorphisme

Travaux pratiques

Espaces euclidiens, géométrie euclidienne, espaces hermitiens

1. Espaces préhilbertiens réels

2. Espaces euclidiens

3. Espaces préhilbertiens complexes, espaces hermitiens

Travaux pratiques

ALGEBRE GENERALE

Groupes

L'objectif de ce chapitre est de consolider les notions abordées en première année : groupes, sous-groupes, morphismes de groupes, groupe symétrique, groupes quotients $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et groupes cycliques.

Anneaux et corps

L'objectif de ce chapitre est double :

- Consolider et approfondir les notions d'arithmétique abordées en classe de première année, notamment grâce à l'étude des anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

- **Consolider les notions sur les polynômes à une indéterminée abordées en classe de première année, notamment grâce à des rappels sur $K[X]$**

Les notions d'anneau quotient et d'anneau principal sont hors programme.

Anneau commutatif

<p>Définition d'un morphisme d'anneaux, d'un isomorphisme, d'un automorphisme.</p> <p>Noyau et image d'un morphisme d'anneaux commutatifs.</p> <p>Dans un anneau intègre A, définition de la relation de divisibilité $x y$.</p>	
--	--

L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

<p>Dans l'anneau \mathbb{Z}, comptabilité de la relation de congruence modulo n avec la multiplication ; anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, morphisme canonique de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Caractérisation des éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.</p>	<p>L'anneau $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement si p est un nombre premier.</p>
--	---

Travaux pratiques

<p>Exemples d'étude de problèmes de divisibilité dans \mathbb{Z},</p> <p>d'emploi de congruences et de calculs dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.</p> <p>Exemples d'étude de problèmes de divisibilité dans $K[X]$.</p>	
--	--

ALGÈBRE LINÉAIRE ET GÉOMÉTRIE AFFINE

1. Espaces vectoriels, applications linéaires

Les espaces vectoriels considérés dans ce chapitre sont définis sur un corps K , K sous-corps de \mathbb{C} .

a. Bases, sommes directes

Somme directe de sous-espaces vectoriels :

définition de la somme $\sum_{i \in I} E_i$, d'une famille finie $(E_i)_{i \in I}$ de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E ; définition d'une somme directe $\oplus E_i$ d'une telle famille. Cas des sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Lorsque E est de dimension finie et que la

somme $\sum_{i \in I} E_i$ est directe

$$\dim \oplus E_i = \sum \dim E_i$$

Lorsque $E = \oplus E_i$, alors, Pour toute famille u_i d'applications linéaires de E_i dans un espace vectoriel F , il existe une application linéaire u de E dans F et une seule telle que, pour tout i , u_i soit la restriction de u à E_i .

Définition d'une base d'un espace vectoriel E de dimension finie adaptée à un sous-espace vectoriel F de E , à une décomposition en somme directe $E = \oplus E_i$.

Dans l'espace vectoriel $K[X]$, le sous-espace vectoriel $K[X]_P$ constitué des multiples d'un polynôme P de degré $n+1$ admet pour supplémentaire le sous-espace vectoriel $K_n[X]$, constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à n .

Alors pour que $E = \oplus E_i$, il faut et il suffit que

$$\dim E = \sum \dim E_i$$

Famille (p_i) de projecteurs de E associée à une décomposition $E = \oplus E_i$; relations

$$p_i^2 = p_i, p_i p_j = 0 \text{ si } i \neq j \text{ et } I_E = \sum p_i.$$

Image et noyau d'une application linéaire

Une application linéaire u de E dans F définit un isomorphisme de tout supplémentaire E' de $\ker u$ sur $\text{Im } u$.

Application à l'interpolation de Lagrange : détermination des polynômes P prenant des valeurs données sur une famille $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ d'éléments de K distincts deux à deux, où K est un sous-corps de C .

Soit u l'application de $K[X]$ dans K^{n+1} définie par : $u(P) = (P(\alpha_0), P(\alpha_1), \dots, P(\alpha_n))$. Le noyau de u est constitué des multiples du polynôme $N = \prod (X - \alpha_j)$; en outre u définit un isomorphisme de $K_n[X]$ sur K^{n+1} .

Définition d'un sous-espace vectoriel E' de

Etant donné un sous-espace vectoriel E' de E et deux sous-espaces supplémentaires F_1 et F_2 de E' dans E , le projecteur de E sur F_1 parallèlement à E' définit un isomorphisme de F_2 sur F_1 .

Définition du rang d'une application linéaire u de E dans F , lorsque F est de dimension finie.

Définition de l'espace dual E^* d'un espace vectoriel E .

Etant donnée une forme linéaire φ sur E non nulle, le sous-espace vectoriel $H = \ker \varphi$ est un hyperplan de E ; toute forme linéaire ψ nulle sur H est colinéaire à φ .

codimension finie dans E , d'un hyperplan. Lorsque E est de dimension finie,

$$\dim E' + \text{codim} E' = \dim E$$

Lorsque E est de dimension finie, relation

$$\dim \text{Im } u + \dim \ker u = \dim E$$

caractérisation des isomorphismes à l'aide du rang. Invariance du rang par composition avec un isomorphisme.

Forme bilinéaire canonique $(\varphi, x) \rightarrow \langle \varphi, x \rangle$ sur $E^* \times E$.

Equations d'un hyperplan.

Dualité en dimension finie

Les espaces vectoriels considérés dans ce paragraphe sont de dimension finie. Les notions d'orthogonalité, d'application transposée et d'espace bidual sont hors programme.

Etant donné un vecteur e non nul d'un espace vectoriel E de dimension finie n , il existe une forme linéaire φ sur E telle que $\varphi(e) = 1$.

Formes linéaires coordonnées $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ associées à une base $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E . les formes linéaires coordonnées constituent une base B^* de E^* appelée base duale de B . La dimension de E^* est égale à n .

Le vecteur nul est le seul vecteur de E sur lequel toute forme linéaire s'annule.

Dans ces conditions, B et B^* vérifient les relations d'orthogonalité de Kronecker

$$\varphi_i(e_j) = \delta_i^j$$

où $\delta_i^j = 0$ si $i \neq j$ et $\delta_i^j = 1$ si $i = j$.

Le noyau de u est constitué des formes linéaires

<p>La donnée d'une famille (e_1, e_2, \dots, e_p) d'éléments de E définit une application linéaire u de E^* dans K^p.</p> <p>Si (e_1, e_2, \dots, e_p) est une base de E, u est un isomorphisme.</p> <p>Pour que (e_1, e_2, \dots, e_p) soit libre, il faut et il suffit que u soit surjective ; dans ces conditions, $\ker u$ est de codimension p et tout vecteur x de E sur lequel les éléments de $\ker u$ s'annulent est combinaison linéaire des vecteurs e_j.</p> <p>La donnée d'une famille $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$ de formes linéaires sur un espace vectoriel E de dimension n définit une application linéaire u de E dans K^p.</p> <p>Si $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$ est une base de E^*, u est un isomorphisme.</p>	<p>s'annulant sur les vecteurs e_j.</p> <p>Application à l'obtention d'une famille d'équations d'un sous-espace vectoriel ou d'un sous-espace affine de E.</p> <p>Le noyau de u est l'intersection des noyaux respectifs H_i, des formes linéaires φ_i.</p> <p>Dans ces conditions, il existe une base (e_1, e_2, \dots, e_n) de E et une seule dont $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ est la base duale : base préduale.</p>
---	--

Trace d'un endomorphisme

<p>Trace d'une matrice carrée ; linéarité de la trace, relations</p> $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA) \text{ et } \text{Tr} PMP^{-1} = \text{Tr} M .$ <p>Trace d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.</p>	<p>Le rang d'un projecteur est égal à sa trace.</p>
---	---

Calcul matriciel et système d'équations linéaires

<p>Définition des matrices équivalentes ; caractérisation de l'équivalence des matrices à l'aide du rang.</p> <p>Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice ; interprétation en</p>	<p>Toute matrice M de rang r est équivalente à la matrice</p> $J_r = (\alpha_{i,j}) ; \text{ où } \alpha_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \leq r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$
---	---

<p>termes de produits matriciels.</p> <p>Application à la recherche du rang d'une matrice, à la résolution des systèmes linéaires, à la recherche de l'inverse d'une matrice carrée, au calcul des déterminants.</p> <p>Application de la dualité à l'étude d'un système d'équations linéaires $\varphi_i(x) = b_i$.</p>	
---	--

1. Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques

a. Formes bilinéaires symétriques

<p>Espace vectoriel des formes bilinéaires symétriques sur un \mathbb{R}- espace vectoriel E. Espace vectoriel des formes quadratiques associées ; polarisation.</p>	<p>Définition des formes symétriques positives, des formes quadratiques positives :</p> <p>Inégalité de Cauchy-Schwarz. Cas des formes définies positives.</p>
--	--

Réduction d'une forme quadratique

Dans ce paragraphe, les espaces vectoriels considérés sont de dimension finie. Les notions d'orthogonalité et de vecteur isotrope sont hors programme.

<p>Matrice associée à une forme bilinéaire symétrique (à une forme quadratique) dans une base de E.</p> <p>Définition du rang d'une forme bilinéaire symétrique (d'une forme quadratique) ; définition d'une forme non dégénérée.</p> <p>Décomposition en carrés (méthode de Gauss). Interprétation matricielle.</p>	<p>Effet d'un changement de base sur cette matrice ; définition des matrices congruentes</p>
---	--

Travaux pratiques

<p>Exemples d'étude de l'indépendance linéaire d'une famille de vecteurs. Exemples de construction de bases et de sous-espaces vectoriels supplémentaires, et d'emploi de bases de supplémentaires, de sommes directes et de changements de bases notamment pour l'étude des équations linéaires.</p> <p>Exemples d'emploi de la dualité.</p> <p>\$ Exemples d'étude de systèmes d'équations linéaires.</p> <p>\$ Emploi des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice à coefficients numériques pour la résolution des systèmes de Cramer par l'algorithme du pivot partiel. Le calcul de déterminants, l'inversion des matrices.</p> <p>\$ Exemples d'obtention et d'emploi de la décomposition en carrés d'une forme quadratique.</p>	<p>Il convient d'exploiter les espaces vectoriels d'endomorphismes, de matrices, de polynômes.</p> <p>Il convient de valoriser les interventions en géométrie.</p>
---	--

Réduction des endomorphismes

1. **Sous-espaces stables, polynômes d'un endomorphisme**
 - a. **Sous-espaces stables**

<p>Définition d'un sous-espace vectoriel F stable par un endomorphisme u d'un espace vectoriel E. Endomorphisme de F induit par u.</p> <p>Si E est de dimension finie, caractérisation des endomorphismes de E stabilisant un sous-espace vectoriel F par leur matrice dans une base de E adaptée à F.</p> <p>Etant donné un espace vectoriel E de dimension finie et une famille (E_1, E_2, \dots, E_n) de sous-</p>	<p>Si les endomorphismes u et v commutent, $\text{Im } u$ et $\text{ker } u$ sont stables par v.</p> <p>Déterminant d'une matrice de la forme $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$.</p> <p>Etant donnée une base d'un espace vectoriel E de dimension finie, caractérisation géométrique des endomorphismes dont la matrice dans cette</p>
---	---

<p>espaces vectoriels dont E est somme directe, caractérisation des endomorphismes stabilisant les sous-espaces E_j par leur matrice dans une base de E adaptée à cette décomposition. Déterminant d'un tel endomorphisme, d'une matrice diagonale par blocs.</p> <p>Définition d'un drapeau (E_1, E_2, \dots, E_n) de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension n, caractérisation des endomorphismes stabilisant les sous-espaces E_j par leur matrice dans une base de E adaptée à ce drapeau.</p>	<p>base est diagonale.</p> <p>Etant donnée une base d'un espace vectoriel E de dimension finie, caractérisation géométrique des endomorphismes dont la matrice dans cette base est triangulaire supérieure.</p>
--	--

b. Polynômes d'un endomorphisme

<p>La donnée d'un endomorphisme de E définit un morphisme $P \rightarrow P(u)$ de l'algèbre $K[X]$ dans l'algèbre $L(E)$.</p> <p>Théorème de décomposition des noyaux : si P et Q sont premiers entre eux,</p> $\ker PQ(u) = \ker P(u) \oplus \ker Q(u)$	<p>Pour tout élément P de $K[X]$, $\text{Im } P(u)$ et $\ker P(u)$ sont stables par u.</p> <p>Extension au cas d'une famille finie de polynômes premiers entre eux deux à deux.</p>
--	--

1. Réduction d'un endomorphisme

a. Valeurs propres, vecteurs propres d'un endomorphisme

<p>Droites stables par un endomorphisme u d'un K-espace vectoriel E. Définition des valeurs propres, des vecteurs propres (le vecteur 0 n'est pas un vecteur propre), des sous-espaces propres $E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda I_E)$ d'un endomorphisme u de E.</p> <p>Si les endomorphismes u et v commutent, les</p>	<p>La notion de valeur spectrale est hors programme.</p> <p>En dimension finie, λ est une valeur propre de u si et seulement si $u - \lambda I_E$ n'est pas inversible ; l'ensemble des valeurs propres de u est alors appelé spectre de u et noté $\text{Sp}(u)$.</p> <p>La somme d'une famille finie de sous-espaces</p>
--	--

<p>sous-espaces propres $E_\lambda(u)$ sont stables par v.</p> <p>Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes deux à deux est libre.</p> <p>Etant donné un endomorphisme u de E et un élément P de $K[X]$, pour toute valeur propre λ de u, $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(u)$. Si $P(u) = 0$, alors toute valeur propre de u est un zéro du polynôme P.</p> <p>Valeurs propres et sous-espaces propres de l'endomorphisme induit par u est sur un sous-espace vectoriel stable.</p> <p>En dimension finie, automorphisme $u \rightarrow au a^{-1}$ de l'algèbre $L(E)$ défini par un élément a du groupe linéaire $GL(E)$.</p>	<p>propres associés à des valeurs propres distinctes deux à deux est directe.</p> <p>Eléments propres des homothéties des projecteurs, des affinités, des symétries.</p> <p>Relation entre les valeurs (les sous-espaces propres) de u et de $au a^{-1}$.</p>
---	---

Valeurs propres, vecteurs propres d'une matrice carrée

<p>Définition des valeurs propres, des sous-espaces propres, des vecteurs propres et du spectre d'un élément M de $M_n(K)$.</p> <p>Un élément M de $M_n(R)$ peut être considéré comme élément de $M_n(C)$; le spectre de M dans R est contenu dans le spectre de M dans C.</p> <p>Automorphisme $M \rightarrow PMP^{-1}$ de l'algèbre $M_n(K)$.</p> <p>Définition des matrices semblables.</p> <p>Interprétation géométrique.</p>	<p>Les éléments propres de M sont définis comme étant ceux de l'endomorphisme u de K^n canoniquement associé à M.</p> <p>Spectre de deux matrices semblables</p>
--	--

Polynôme caractéristique

<p>Polynôme caractéristique d'une matrice, d'un endomorphisme. Ordre de multiplicité d'une</p>	
--	--

<p>valeur propre.</p> <p>Lorsque ce polynôme est scindé, expression de la trace et du déterminant en fonction des valeurs propres.</p> <p>Théorème de Cayley-Hamilton.</p>	<p>La démonstration de ce théorème n'est pas exigible des étudiants.</p>
--	--

Réduction d'un endomorphisme en dimension finie

<p>Définition d'un endomorphisme u diagonalisable : l'espace vectoriel E est somme (directe) des sous-espaces propres $E_\lambda(u)$.</p> <p>Projecteurs P_λ associés ; relation</p> $u = \sum_{\lambda} \lambda P_\lambda.$ <p>Inversement, si E est somme directe de sous-espaces vectoriels stables E_j sur lesquels u induit une homothétie, alors u est diagonalisable.</p> <p>Pour qu'un endomorphisme u de E soit diagonalisable, il faut et il suffit que la somme des dimensions de sous-espaces propres de u soit égale à $\dim E$.</p> <p>Pour qu'un endomorphisme u de E soit diagonalisable, il faut et il suffit qu'il annule un polynôme scindé dont toutes les racines sont simples.</p> <p>Définition d'un endomorphisme u trigonalisable : il existe une base telle que la matrices associée à u dans cette base soit triangulaire supérieur.</p> <p>Pour qu'un endomorphisme u de E soit trigonalisable, il faut et il suffit qu'il annule un polynôme scindé.</p> <p>Définition d'une matrice carrée M diagonalisable, trigonalisable. Pour que M soit</p>	<p>Un endomorphisme u est diagonalisable si et seulement s'il existe une base formée de vecteurs propres de u, ou encore s'il existe une base dans laquelle la matrice de u est diagonale.</p> <p>Tout endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé et a toutes ses racines simples est diagonalisable et sous-espaces propres sont de dimension 1.</p> <p>Si u est diagonalisable, pour tout sous-espace vectoriel F de E stable par u, l'endomorphisme de F induit par u l'est aussi.</p> <p>Tout endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé est trigonalisable.</p> <p>Aucune connaissance spécifique sur la notion de sous-espace caractéristique n'est exigible des étudiants. La réduction de Jordan est hors programme.</p> <p>Lorsque M est diagonalisable, M s'écrit sous la forme PDP^{-1}, où D est diagonalisable et P désigne la matrice de passage de la base canonique de K^n à une base de vecteurs propres de M. Cas des matrices trigonalisables.</p>
--	---

diagonalisable (resp. trigonalisable), il faut et il suffit que M soit semblable à une matrice diagonale (resp. triangulaire supérieur).

Travaux pratiques

\$ Exemples d'emploi du théorème de décomposition des noyaux et d'étude d'endomorphismes ou de matrices annulant un polynôme.

Exemples d'emploi de décomposition en blocs (produits, matrices diagonales par blocs, triangulaires par blocs).

Exemples d'étude de matrices ou d'endomorphismes qui annulent un polynôme.

\$ Exemples de réduction à la forme diagonale ou triangulaire de matrices carrées sur \mathbb{C} ou sur \mathbb{R} .

\$ Exemples d'étude du comportement des puissances n -ièmes d'une matrice et d'étude de suites numériques satisfaisant à une relation de récurrence linéaire à coefficients constants.

Il convient de donner quelques exemples de matrices non diagonalisables, mais aucune méthode générale de réduction à la forme triangulaire n'est exigible des étudiants.

Les étudiants doivent savoir déterminer les suites satisfaisant à une relation de récurrence

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

Espaces euclidiens, géométrie euclidienne, espaces hermitiens

1. Espaces préhilbertiens réels

Produit scalaire

Produit scalaire sur un \mathbb{R} -espace vectoriel ; définition d'un espace préhilbertien réel. Inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité

L'étude de ces notions doit être illustrée par de nombreux exemples, notamment le produit scalaire canonique de \mathbb{R}^n et les produits

<p>triangulaire ; norme et distance associées.</p> <p>Relations entre produit scalaire et norme, polarisation.</p>	<p>scalaires usuels sur les espaces de suites et de fonctions.</p>
--	--

Orthogonalité

<p>Vecteurs unitaires. Vecteurs orthogonaux, sous-espaces vectoriels orthogonaux, orthogonal F° (ou F^\perp) d'un sous-espace vectoriel F de E.</p> <p>Sous-espaces vectoriels supplémentaires orthogonaux,</p> <p>projecteurs orthogonaux.</p> <p>Somme directe orthogonale d'une famille finie de sous-espaces vectoriels.</p>	<p>Familles orthogonales. Familles orthonormales : relation de Pythagore pour une famille orthogonale finie.</p> <p>Projecteurs orthogonaux associés à une décomposition de E en somme directe orthogonale.</p>
---	--

1. Espaces euclidiens

a. Bases orthonormales

<p>Définition d'un espace vectoriel euclidien : espace préhilbertien réel de dimension finie.</p> <p>Existence de bases orthonormales, complétion d'une famille orthonormale en une base orthonormale.</p> <p>Isomorphisme de E sur l'espace dual E^*.</p> <p>Expressions dans une base orthonormale des coordonnées et de la norme d'un vecteur, produit scalaire de deux vecteurs, de la distance</p>	<p>Existence d'une base orthonormale adaptée à un drapeau.</p> <p>Toute forme linéaire f sur un espace vectoriel euclidien E s'écrit de manière unique sous la forme $f(x) = (a x)$ où a est un vecteur de E.</p> <p>La donnée d'une base orthonormale d'un espace vectoriel euclidien E de dimension n détermine un isomorphisme de \mathbb{R}^n (muni du produit scalaire canonique) sur E.</p>
---	--

de deux points, de la trace et du déterminant d'un endomorphisme.	
---	--

b. Projections orthogonales

<p>Dans un espace préhilbertien réel E (de dimension finie ou non), l'orthogonal F° d'un sous-espace vectoriel F de dimension finie est un supplémentaire de ce sous-espace vectoriel, appelé supplémentaire orthogonal de F ;</p> <p>définition de la projection orthogonale $p_F(x)$ d'un vecteur x de E sur F. En outre,</p> $\text{Codim} F^\circ = \dim F \text{ et } F^{\circ\circ} = F$ <p>Définition de la distance de $d(x, F)$ d'un élément x de E à F.</p> <p>Expression de cette distance à l'aide de $p_F(x)$: la fonction qui, à tout élément z de F associe $\ x - z\$ atteint son minimum en point et un seul, à savoir $p_F(x)$; Relation :</p> $\ x\ ^2 = \ p_F(x)\ ^2 + d(x, F)^2.$	<p>Expression de $p_F(x)$ lorsque F est muni d'une base orthonormale (e_1, e_2, \dots, e_n) :</p> $p_F(x) = \sum_{j=1}^n (e_j x) e_j.$ <p>Inégalité de Bessel :</p> $\sum_{j=1}^n (e_j x) ^2 \leq \ x\ ^2.$
---	---

c. Adjoint d'un endomorphisme

d. Dans ce paragraphe, les espaces vectoriels considérés sont euclidiens.

e.

<p>Définition de l'adjoint u^* d'un endomorphisme u de E par la relation $(u^*(x) y) = (x u(y))$; existence et unicité de l'adjoint. Noyau, image et rang de l'adjoint :</p> $\ker u^* = (\ker u)^\circ, \text{ Im } u^* = (\text{Im } u)^\circ, \text{ rg } u^* = \text{ rg } u$ <p>Matrice associée à u^* dans une base orthonormale. Relations $\text{Tr}(u^*) = \text{Tr}(u)$ et $\det(u^*) = \det(u)$.</p> <p>Définition d'un endomorphisme autoadjoint (ou</p>	<p>L'application $u \rightarrow u^*$ est un automorphisme involutif de l'espace vectoriel $L(E)$; relation $(uv)^* = v^*u^*$.</p> <p>Pour qu'un sous-espace vectoriel F de E soit stable par un endomorphisme u, il faut et il suffit que F° soit stable par u^*.</p> <p>Caractérisation par la relation $u^{**} = u$. Caractérisation des projecteurs orthogonaux par</p>
--	--

<p>symétrique) par la relation $(u(x) y) = (x u(y))$. Les endomorphismes autoadjoints constituent un sous-espace vectoriel de $L(E)$.</p> <p>Définition d'un endomorphisme autoadjoint positif par la relation $(u(x) x) \geq 0$, d'un endomorphisme autoadjoint défini positif.</p> <p>Automorphismes orthogonaux, groupe orthogonal $O(E)$.</p> <p>Rotations, groupe spécial orthogonal $SO(E)$.</p> <p>Etant donnés deux vecteurs unitaires distincts a et b de E, écriture de la réflexion $S_{a,b}$ échangeant a et b sous la forme</p> $S_{a,b}(x) = x - 2\frac{(x a-b)}{(a-b a-b)}(a-b)$ <p>où e est le vecteur unitaire associé à $b - a$.</p> <p>Caractérisation d'un endomorphisme autoadjoint, d'un automorphisme orthogonal, à l'aide de la matrice associée dans une (toute) base orthogonale.</p>	<p>les relations $p^2 = p$ et $p^* = p$.</p> <p>Pour tout endomorphisme u, u^*u et uu^* sont autoadjoints positifs. Cas où u est un automorphisme.</p> <p>Caractérisation des automorphismes orthogonaux par la relation $u^* = uu^* = I_E$.</p> <p>Etant données deux droites distinctes $D = Ra$ et $D' = Rb$ de E, les réflexions échangeant D et D' sont $S_{a,b}$ et $S_{a,-b}$.</p> <p>Cas d'un endomorphisme autoadjoint positif, défini positif ; définition des matrices symétriques positives, définies positives.</p>
--	--

f. Réduction des endomorphismes autoadjoints

<p>Etant donné un endomorphisme autoadjoint u d'un espace euclidien E, cette espace est somme directe orthogonale des sous-espaces propres de u ; en particulier, u est diagonalisable dans une base orthonormale.</p> <p>Spectre d'un endomorphisme autoadjoint positif, défini positif.</p> <p>Endomorphisme autoadjoint à une forme bilinéaire symétrique (ou à une forme dans quadratique) sur un espace euclidien E ; réduction de cette forme dans une base orthonormale de E.</p>	<p>Diagonalisation d'une matrice symétrique au moyen d'une matrice orthogonale.</p>
--	---

1. Espaces préhilbertiens complexes, espaces hermitiens

b. Espaces préhilbertiens complexes

Produit scalaire $(x, y) \rightarrow (x|y)$ sur un C-espace vectoriel (linéaire à droite, semi-linéaire à gauche) : définition d'un espace vectoriel préhilbertien complexe. Inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité triangulaire; norme et distance associées.

Relations entre produit scalaire et norme :

- $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re}(x|y)$
- $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\operatorname{Re}(x|y)$
- $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

(identité du parallélogramme)

- $4\operatorname{Re}(x|y) = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2$
- $4(x|y) = \|y + ix\|^2 - \|y - ix\|^2 + i\|y + ix\|^2 - i\|y - ix\|^2$

(identité de polarisation).

Vecteurs unitaires. Vecteurs orthogonaux, sous-espaces vectoriels orthogonaux, orthogonal d'un sous-espace vectoriel.

Sous-espaces vectoriels supplémentaires orthogonaux, projecteurs orthogonaux, somme directe orthogonale d'une famille finie de sous-espaces vectoriels.

L'étude de ces notions doit être illustrée de nombreux exemples, et notamment :

- le produit scalaire canonique de C^n ;
- le produit scalaire canonique sur l'espace l^2 des suites de carré sommable.
- $(f, g) \rightarrow (f|g) = \int_{[a,b]} \bar{f}g$ dans $C([a, b])$;
- $(f, g) \rightarrow (f|g) = \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi]}$ dans l'espace vectoriel $C_{2\pi}$

des fonctions continues 2π périodiques sur \mathbb{R} à valeurs complexes.

Familles orthogonales, familles

orthonormales : relation de Pythagore pour une famille orthogonale finie.

Espaces vectoriels hermitiens

<p>Définition d'un espace vectoriel hermitien : espace préhilbertien complexe de dimension finie. Existence de bases orthonormales, complétion d'une famille orthonormale en une base orthonormale.</p> <p>Dans un espace préhilbertien complexe E (de dimension finie ou non), existence du supplémentaire orthogonal F° d'un sous-espace vectoriel F de dimension finie; définition de la projection orthogonale $p_F(x)$ d'un vecteur x de E sur F. En outre,</p> $\text{Codim} F^\circ = \dim F \text{ et } F^{\circ\circ} = F$ <p>Définition de la distance de $d(x, F)$ d'un élément x de E à F.</p> <p>Expression de cette distance à l'aide de $p_F(x)$: la fonction qui, à tout élément z de F associe $\ x - z\$ atteint son minimum en point et un seul, à savoir $p_F(x)$; Relation : $\ x\ ^2 = \ p_F(x)\ ^2 + d(x, F)^2$.</p>	<p>Toute forme linéaire f sur un espace vectoriel hermitien E s'écrit de manière unique sous la forme $f(x) = (a x)$ où a est un vecteur de E.</p> <p>Expression de $p_F(x)$ lorsque F est muni d'une base orthonormale (e_1, e_2, \dots, e_n) :</p> $p_F(x) = \sum_{j=1}^n (e_j x) e_j.$ <p>Inégalité de Bessel.</p>
--	---

Travaux pratiques

<p>\$ Exemples de construction et d'emploi de bases orthonormales et de supplémentaires orthogonaux. Orthonormalisation d'une famille libre par la méthode Schmidt.</p> <p>Exemples de calcul et d'emploi de la projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie, de la distance à un tel sous-espace.</p>	<p>Il convient d'exploiter les espaces vectoriels \mathbb{R}^n et \mathbb{C}^n ainsi que les espaces vectoriels de polynômes, de suites et de fonctions.</p> <p>Il convient notamment d'exploiter l'approximation des fonctions.</p> <p>Aucune connaissance spécifique sur les</p>
--	--

<p>Exemples d'étude et d'emploi de suites de polynômes orthogonaux.</p> <p>Exemple de réduction d'endomorphismes et de matrices en base orthonormale.</p> <p>Exemples de recherche d'une équation réduite d'une conique définie par une équation cartésienne dans un repère orthonormale.</p> <p>Description des quadriques usuelles (en dimension 3) définies par une équation cartésienne réduite en repère orthonormale : ellipsoïdes, hyperboloïdes (à une nappe et à deux nappes), paraboloides (elliptiques et hyperboliques), cônes, cylindres (elliptiques, et hyperboliques)</p>	<p>propriétés des polynômes orthogonaux n'est exigible des étudiants.</p> <p>Les étudiants doivent savoir reconnaître sur l'équation réduite des éléments de symétrie et les quadriques de révolution. Aucune autre connaissance spécifique sur les quadriques n'est exigible.</p>
--	--