Programme de Mathématique

Préparation Physique-Chimie &Technologie

Algèbre Et Géométrie

Première Année

I. NOMBRE ET STUCTURES ALGEBRIQUES USUELLES

1. Ensembles, applications
2. Nombres entiers naturels, ensembles finis, dénombrement
3. Structures algébriques usuelles
4. Polynômes et fractions rationnelles

II. ALGEBRE ET GEOMETRIE AFFINE

1. Espaces vectoriels de dimension finie
2. Calcul matriciel
3. Géométrie affine réelle

III. ESPACES VECTORIELS EUCLIDENS ET GEOMETRIE EUCLIDIENNE

1. Produit scalaire, espaces vectoriels euclidiens
2. Géométrie euclidienne du plan et de l'espace

I. NOMBRE ET STUCTURES ALGEBRIQUES USUELLES

1. Ensembles, applications

Ensemble, opérations sur les parties

Ensembles, appartenances, inclusion. Ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E. Opérations sur les parties : intersection, réunion, complémentaire. Produit de deux ensembles.	Il convient d'introduire, sur des exemples, les notions élémentaires de logique.

Applications, lois de composition

Une application f de E dans (vers) F est définie par son ensemble de départ E, son ensemble	Notations : $E \xrightarrow{f} F$, $f : E \to F$, $x \to f(x)$, la première étant très commode, notamment

d'arrivée ***F*** et son graphe *G*. Ensemble ***F***(***E***, ***F***) des applications de ***E*** dans ***F***. Ensemble $\boldsymbol{E^I}$ des familles $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments d'un ensemble ***E*** indexées par un ensemble ***I***. Composée de deux applications, application identique. Restriction et prolongement d'une application. Equations, applications injectives, surjectives, bijectives. Applications réciproque d'une bijection. Composée de deux Injections, de deux surjections, de deux bijections. Définition des images directe et réciproque d'une partie ; comptabilité de l'image réciproque avec les opérations sur les parties. Fonction caractéristique d'une partie, lien avec les opérations sur les parties. Définitions d'une loi de composition interne. Associativité, commutativité, élément neutre. Définition d'un monoide, éléments inversibles. Notations additive et multiplicative d'une loi de composition.	pour la composition des applications. Le programme ne distingue pas les notions de fonction et d'application. La notion de correspondance entre deux ensembles est hors programme. Aucune connaissance spécifique sur les images directes et leurs relations avec les images réciproques n'est exigible des étudiants. Tout développement sur les monoides est hors programme.

Relations d'ordre

Définition d'une relation d'ordre, ordre total, ordre partiel. Majorants, minorants, plus grand et plus petit élément.	La notion de borne supérieure (ou inférieur) n'est étudiée que dans le cadre des nombres réels et des fonctions à valeurs réelles. La notion d'élément maximal est hors programme.

- **Nombres entiers naturels, ensembles finis, dénombrement**

  a. **Nombres entiers naturels**

Propriétés fondamentales de l'ensemble ***N*** des nombres entiers naturels. Toute partie non vide a un plus petit élément ; principe de récurrence. Toute partie majorée non vide a un plus grand élément. Suites d'éléments d'un ensemble ***E*** (indexées par une partie de ***N***). Suite définie par une relation de récurrence et une condition initiale.	Les étudiants doivent maîtriser le raisonnement par récurrence simple ou avec prédécesseurs.

Ensembles finis

Définition : il existe une bijection de $[1,n]$sur ***E*** ; cardinal (ou nombres d'éléments) d'un ensemble fini, notation Card ***E***. On convient que l'ensemble vide est fini et que Card Ø = 0. avec égalité si et seulement si ***E***' = ***E***. Etant données deux ensembles finis ***E*** et ***F*** de même Cardinal, et une application f de ***E*** dans ***F***, f est bijective si et seulement si f est surjective ou injective.	S'il existe une bijection de $[1,p]$sur $[1,n]$alors p = n ; cas d'une injection, d'une surjection. Les étudiants doivent connaître des exemples de parties strictes de N en bijection avec **N**. Une partie non vide ***P*** de **N** est finie si et seulement si elle majorée. Si ***P*** est finie non vide, il existe une bijection strictement croissante et une seule de l'intervalle $[1,n]$sur ***P***, où n = Card ***P*** ; la démonstration de ce résultat n'est pas exigible des étudiants.

Somme et produits

Dans un monoide commutatif ***E***, somme (ou produit) d'une famille $(a_p)_{1\le p\le n}$; notations $a_1+a_2+\dots a_n$, $a_1a_2\dots a_n$, $\sum_{1\le p\le n} a_p$, $\prod_{1\le p\le n} a_p$. Brève extension au cas des familles indexées par un ensemble fini ***I***. Suites arithmétiques, suites géométriques. Notations *na* et a^n.	. Symbole n! (on convient que 0! = 1).

Opérations sur les ensembles finis, dénombrements

Si ***E*** et ***F*** sont des ensembles finis, $\boldsymbol{E} \cup \boldsymbol{F}$ l'est aussi ; cardinal d'une réunion finie de parties finies disjointes. Si ***E*** et ***F*** sont des ensembles finis, $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$ l'est aussi Etant donnés un entier *p*, des ensembles finis ***E*** et ***F***, et une application *f* de ***E*** dans ***F*** tels que, pour tout élément *b* de ***F*** Card $f^{-1}(b) = p$, alors Card $\boldsymbol{E} = p.$ Card$\boldsymbol{F}$ Cardinal de l'ensemble ***F***(***E***, ***F***) des applications de ***E*** dans ***F*** ; cardinal de l'ensemble ***P***(***E***) des parties de ***E***. Etant donnés des ensembles finis ***E*** et ***F*** ayant respectivement *p* et *n* éléments, cardinal A_n^p de l'ensemble des injections de ***E*** dans ***F*** ; arrangements. Cas des bijections ; permutation. Cardinal $\binom{p}{n}$, ou C_n^p de l'ensemble des parties ayant *p* éléments d'un ensemble ***E*** à *n* éléments. Combinaisons. Relations	Les étudiants doivent connaître la relation Card $(A \cup B) =$ Card A + Card B - Card $(A \cap B)$, ainsi que son extension au cas de trois parties. Les étudiants doivent savoir utiliser ces résultats pour le dénombrement des *p*-listes d'éléments (des p-listes d'éléments distincts deux à deux) d'un ensemble fini.

. Structures algébriques usuelles

a. Groupes

Définition d'un groupe, d'un sous-groupe, d'un morphisme de groupes, d'un isomorphisme. Noyau et image d'un morphisme de groupes. Groupe additif **Z** des nombres entiers. Groupe ***U*** des nombres complexes de module	Ces notions doivent être illustrées par de nombreux exemples issus : o en première période, des ensembles de nombres notamment **Z**, **R** et **C** ; o en seconde période, de l'algèbre linéaire et de la géométrie

1 : définition de $e^{i\theta}$, relation d'Euler. L'application $\theta \to e^{i\theta}$ est un morphisme surjectif du groupe additif ***R*** sur le groupe multiplicatif ***U*** dont le noyau est 2π **Z**. Formule de Moivre. Argument d'un nombre complexe. Ecriture d'un nombre complexe non nul z sous la forme $z = \rho e^{i\theta}$ où $\rho > 0$ et $\theta \in$ **R**. Groupe $\boldsymbol{U}_n$ des racines *n*-ièmes de l'unité. Résolution de l'équation $z^n = a$.	Par définition $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. Morphisme $(\rho, \theta) \to \rho e^{i\theta}$ de $\mathbf{R}^*_+ \times \mathbf{R}$ sur **C**.

Anneaux et corps

Définition d'un anneau (ayant un élément unité), d'un sous-anneau, d'un morphisme d'anneaux, d'un isomorphisme d'anneaux. Distributivité du produit par rapport au symbole sommatoire $\sum$. Définition d'un corps (commutatif et non réduit à { 0}), d'un sous-corps. Anneau intègre ***A*** (commutatif, sans diviseur de 0, et non réduit à { 0}). Anneau **Z** des nombres entiers, corps **Q** des nombres Rationnels. Relation d'ordre, valeur absolue. Multiples et diviseurs d'un entier. Division euclidienne dans **Z**, algorithme de la division euclidienne. Numération décimale ; numération binaire.	Ces notions doivent être illustrées par de nombreux exemples, issu : • des ensemble de nombres **Z**, **Q**, **R**, **C** ; • des polynômes et des fractions rationnelles. La construction de **Z** et **Q** est hors programme. La démonstration de l'existence et de l'unicité de décomposition en facteurs premiers est hors

Définition des nombres premiers. Existence et unicité de la décomposition d'un entier strictement positif en produit de facteurs premiers. Calculs dans un anneau commutatif et dans un corps. Somme des n premiers termes d'une suite géométrique.	programme. Brève extension au cas d'éléments d'un anneau qui commutent.

Espaces vectoriels

Définition d'un espace vectoriel sur un corps **K**, définition d'un sous-espace vectoriel, d'une application linéaire, d'une forme linéaire. Composée de deux applications linéaires. Définitions d'un isomorphisme, d'un endomorphisme, d'un automorphisme. L'application réciproque d'une application linéaire bijective est linéaire. Espace vectoriel produit $E \times F$. Espace vectoriel $F(X, F)$ des applications d'un ensemble X dans un espace vectoriel F. Espace vectoriel $L(E, F)$ des applications linéaires de dans F ; linéarité des applications $v \to vou$ et $u \to vou$. Equations linéaires ; noyau et image d'une application Linéaire. Description de l'ensemble des solutions de $u(x) = b$.	Ces notions doivent être illustrées par de nombreux exemples, et notamment : • L'espace vectoriel $\mathbf{K}^n$. • l'espace vectoriel $F(X,\mathbf{K})$ des applications d'un ensemble X dans **K** ; • les espaces vectoriels de suites et de fonctions ; • l'espace vectoriel $M_{n,p}$ (**K**) des matrices à coefficients dans **K** à n lignes et p colonnes.

Définitions des combinaisons linéaires de p vecteurs $x_1, x_2, .. x_p$ d'un espace vectoriel ; image par une application linéaire d'une combinaison linéaire. Définition des relations linéaires entre p vecteurs $x_1, x_2, .. x_p$ d'un espace vectoriel. Intersection de sous-espaces vectoriels ; définition du sous espace vectoriel engendré par une partie. Somme ***F***+***G*** de deux sous-espaces vectoriels. Sous- espaces supplémentaires, notation ***E*** = ***F***$\oplus$***G***. Projecteurs associés.	On traite d'abord le cas d'une famille $(x_1, x_2, .. x_p)$ puis on étend brièvement ces notions au cas des familles finies $(x_i)_{i \in I}$. Le cas des familles indexées par un ensemble infini est hors programme. Description du sous espace vectoriel engendré par un nombre fini de vecteurs. La notion générale de somme directe est hors programme.

Algèbres

Définition d'une **K**-algèbre associative unitaire ; une telle algèbre est munie d'une structure d'anneau. Définition d'une sous-algèbre, d'un morphisme d'algèbre, d'un isomorphisme, d'un endomorphisme, d'un automorphisme Algèbre ***F***(***X***, **K**) des applications d'un ensemble ***X*** dans le corps **K**. Algèbre ***L***(***E***) des endomorphismes d'un espace vectoriel ***E*** ; homothéties, caractérisation des projecteurs par la relation $p^2 = p$.	Ces notions doivent être illustrées par de nombreux exemples, et notamment : • la **R**-algèbre **C** des nombres complexes. • l'algèbre **K** [X] des polynômes à coefficients dans **K** • les algèbres de suites et de fonctions ; • l'algèbre M_n (**K**) des matrices à coefficients dans **K** à n lignes et n colonnes. L'étude générale des algèbres est hors programme.

1. **Polynômes et fractions rationnelles**

a. **Algèbre K [X] et corps K (X)**

Algèbre **K**$[X]$ des polynômes à une indéterminée à coefficients dans un corps **K**. Degré d'un polynôme (on convient que le degré	

de 0 est - ∞), coefficient dominant polynôme unitaire (ou normalisé). Degré d'un produit, d'une somme ; les polynômes de degré inférieur ou égal à *p* constituent un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$. L'anneau $\mathbf{K}[X]$ est intègre. Corps $\mathbf{K}(X)$ des fractions rationnelles, degré d'une fraction rationnelle. Multiples et diviseurs d'un polynôme, polynômes Associés. Division euclidienne dans $\mathbf{K}[X]$ **,** algorithme de la division euclidienne. Division suivant les puissances croissantes.	Les notions de PGCD, de PPCM et de polynômes premiers entre eux sont hors programme.

Fonctions polynomiales et rationnelles

Fonction polynomiale associée à un polynôme. Equations algébriques. Zéros (ou racines) d'un polynôme ; ordre de multiplicité. Isomorphisme entre polynômes et fonctions polynomiales. Fonction rationnelle associée à une fraction rationnelle. Zéros et pôles d'une fraction rationnelle ; ordre de multiplicité. Définition du polynôme dérivé. Linéarité de la dérivation, dérivée d'un produit. Dérivées successives, dérivée *n*-ième d'un produit (formule de Leibniz). Formule de Taylor application à la recherche de l'ordre de multiplicité d'un zéro.	Reste de la division euclidienne d'un polynôme *P* par $X-a$; caractérisation des zéros de *P*. Algorithme de Horner pour le calcul des valeurs d'une fonction polynomiale.

polynômes scindés

Définition d'un polynôme scindé sur **K** ; relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme scindé. Théorème de d'Alembert-Gauss. Description des polynômes irréductibles de **C**$[X]$ et de **R**$[X]$. Décomposition d'un polynôme en produit de facteurs irréductibles sur **C** et sur **R**.	Aucune connaissance spécifique sur le calcul des fonctions symétrique des racines d'un polynôme n'est exigible des étudiants. La démonstration du théorème de d'Alembert-Gauss n'est pas exigible des étudiants. Décomposition dans **C**$[X]$ de $X^n - 1$.

Etude locale d'une fraction rationnelle

Existence et unicité de la partie entière d'une fraction rationnelle *R* ; existence et unicité de la partie polaire de *R* relative à un pôle *a*. Lorsque *a* est un pôle simple de *R*, expressions de la partie polaire relative à ce pôle. Lorsque **K** = **C**, toute fraction rationnelle *R* est égale à la somme de sa partie entière et de ses parties polaires. Existence et unicité de la décomposition de *R* en éléments simples. Décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$	Les étudiants doivent savoir calculer la partie polaire en un pôle multiple en utilisant la division suivant les puissances croissantes. Aucune connaissance spécifique sur la décomposition en éléments simples sur un corps autre que **C** n'est exigible des étudiants. La démonstration de ce résultat est hors programme.

I. ALGEBRE ET GEOMETRIE AFFINE

1. Espaces vectoriels de dimension finie

L'étude des espaces vectoriels et des applications linéaires est à mener de front avec celle du calcul matriciel.

a. Familles libres, familles génératrices, bases

Définition d'une famille libre, d'une famille liée, d'une famille génératrice, d'une base ; cordonnées (ou composantes) d'un vecteur dans	La donnée d'une famille de p vecteurs $(x_1, x_2, .. x_p)$ d'un **K**-espace vectoriel ***E*** détermine une

une base. Base canonique de $\mathbf{K}^n$. Etant donnés un espace vectoriel $\boldsymbol{E}$ muni d'une base $(e_1, e_2, ..e_p)$ et une famille $(f_1, f_2, ..f_p)$ de vecteurs d'un espace vectoriel $\boldsymbol{F}$, il existe une application linéaire u et une seule de $\boldsymbol{E}$ dans $\boldsymbol{F}$ telle que $u(e_j) = f_j$.	application linéaire de $\mathbf{K}^p$ dans $\boldsymbol{E}$; noyau et image de cette application ; caractérisation des bases de $\boldsymbol{E}$, des familles génératrices, des familles libres.

Dimension d'un espace vectoriel

Définition d'un espace de dimension finie (espace vectoriel admettant une famille génératrice finie). Théorème de la base incomplète, existence de bases. Toutes les bases d'un espace vectoriel $\boldsymbol{E}$ de dimension finie ont le même nombre d'éléments, appelé dimension de $\boldsymbol{E}$. On convient que l'espace vectoriel réduit à $\{0\}$ est de dimension nulle. Tout espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbf{K}^n$; deux espaces vectoriels de dimension finie $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{F}$ sont isomorphes si et seulement si dim $\boldsymbol{E}$ = dim $\boldsymbol{F}$. Base de $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$ associée à des bases de $\boldsymbol{E}$ et de $\boldsymbol{F}$; dimension de $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$. Etant donnés un espace vectoriel $\boldsymbol{E}$ muni d'une base $B = (e_j)$ et un espace vectoriel $\boldsymbol{F}$ muni d'une base $C = (f_i)$, une application linéaire u de $\boldsymbol{E}$ dans $\boldsymbol{F}$ et un vecteur x de $\boldsymbol{E}$, expression des coordonnées de $y = u(x)$ dans C en fonction des coordonnées de x dans B.	Etant donnée une famille S de vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n : • si S est libre, alors $p \leq n$, avec égalité si et seulement si S est une base ; • si S est génératrice, alors $p \geq n$, avec égalité si et seulement si S est une base. Etant donnée une forme linéaire φ sur $\boldsymbol{E}$ expression de $\varphi(x)$ en fonction des coordonnées de x dans B.

Dimension d'un sous- espace vectoriel

Tout sous-espace vectoriel ***E'*** d'un espace vectoriel de dimension finie ***E*** est de dimension finie et dim ***E***' ≤ dim ***E***, avec égalité si et seulement si ***E'*** = ***E***. Rang d'une famille de vecteurs. Existence de sous-espace vectoriels supplémentaires d'un sous-espace vectoriel donné ; dimension d'un supplémentaire.	Les étudiants doivent connaître la relation dim (***E***+***F***) = dim***E*** + dim***F*** - dim (***E***$\cap$ ***F***).

Rang d'une application linéaire

Etant donnée une application linéaire *u* de ***E*** dans ***F***, *u* définit un isomorphisme de tout supplémentaire de $\ker u$ sur $\operatorname{Im} u$; en particulier, dim ***E*** = dim $\ker u$ + dim $\operatorname{Im} u$ Rang d'une application linéaire, caractérisation des isomorphismes. Caractérisation des éléments inversibles de l'algèbre ***L***(***E***). Définition du groupe ***GL***(***E***) ; homothéties de rapport non nul, affinités, symétries. Caractérisation des symétries par la relation $s^2 = I_E$.	Cas d'une forme linéaire : caractérisation et équations d'un hyperplan. Invariance du rang par composition avec un isomorphisme. L'étude générale du groupe linéaire est hors programme.

1. Calcul matriciel

a. Opérations sur les matrices

Espace vectoriel $M_{n,p}$ (**K**) des matrices à *n* lignes et *p* colonnes sur un corps **K**. Base canonique $(E_{i,j})$ de $M_{n,p}$ (**K**) ; dimension de $M_{n,p}$ (**K**). Isomorphisme canonique de ***L***($\mathbf{K}^p$,$\mathbf{K}^n$) sur $M_{n,p}$ (**K**). Définition du produit matriciel, bilinéarité.	Identification des matrices colonnes et des vecteurs de $\mathbf{K}^n$, des matrices lignes et des formes linéaires sur $\mathbf{K}^p$ Ecriture matricielle *Y* = *MX* de l'effet d'une application linéaire sur un vecteur.

Algèbre M_n(**K**) des matrices carrées à *n* lignes. Isomorphisme canonique de l'algèbre ***L***(***E***) sur l'algèbre M_n(**K**). Matrices carrées inversibles ; définition du groupe linéaire $\boldsymbol{GL_n}$ (**K**). Transposée d'une matrice. Comptabilité avec les opérations algébriques sur les matrices. Matrices carrées symétriques, antisymétriques.	Sous-algèbre des matrices diagonales, des matrices triangulaires supérieurs (ou inférieurs). Les matrices symétriques et les matrices antisymétriques constituent des sous-espaces supplémentaires.

Matrices et applications linéaires

Matrice $M_{B,C}(u)$ associée à une application linéaire *u* d'un espace vectoriel ***E*** muni d'une base *B* dans un espace vectoriel ***F*** muni d'une base *C*. L'application $u \rightarrow M_{B,C}(u)$ est un isomorphisme de ***L***(***E***,***F***) sur $M_{n,p}$ (**K**). Dimension de ***L***(***E***,***F***). Matrice $M_B(u)$ associée à un endomorphisme *u* d'un espace vectoriel ***E*** muni d'une base *B*. L'application $u \rightarrow M_B(u)$ est un isomorphisme d'algèbres. Matrices dans une base d'une famille finie de vecteurs, d'une famille finie de formes linéaires. Matrices de passage d'une base *B* à une base *B*' d'un espace vectoriel ***E*** ; effet d'un changement de base(s) sur les coordonnées d'un vecteur, sur l'expression d'une forme linéaire, sur la matrice d'une application linéaire, sur la matrice d'un endomorphisme.	La *j*-ième colonne de $M_{B,C}(u)$ est constituée des coordonnées dans la base *C* de l'image par u du *j*-ième vecteur de la base *B*. La matrice de passage de la base *B* à la base *B*' est, par définition, la matrice de la famille *B*'

	dans la base *B* : sa *j*-ième colonne est constituée des coordonnées dans la base *B* du *j*-ième vecteur de la base *B'*. Cette matrice est aussi $M_{B,B'}(I_E)$.

Opérations élémentaires sur les matrices

Opération (ou manipulation) élémentaires sur les lignes (ou les colonnes) d'une matrice. Interprétation des opérations élémentaires en termes de produits matriciels. Application à l'inversion d'une matrice carrée par la méthode du pivot de Gauss.	Les opérations élémentaires sur les lignes sont les suivantes : • addition d'un multiple d'une ligne à une autre (codage : $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$) . • multiplication d'une ligne par un scalaire non nul (codage : $L_i \leftarrow \alpha L_i$). • échange de deux lignes (codage : $L_i \leftrightarrow L_j$). Cette méthode permet en outre d'étudier l'inversibilité de la matrice.

Rang d'une matrice

Définition du rang d'une matrice (rang de l'application linéaire canoniquement associée, ou encore rang des vecteurs colonnes). Une matrice de $M_{n,p}$ (**K**) est de rang *r* si et seulement si elle est de la forme $U J_r V$ où *U* et *V* sont des matrices carrées inversibles. Invariance du rang par transposition. Emploi des opérations élémentaires pour le calcul du rang d'une matrice.	Pour toute application linéaire *u* de ***E*** dans ***F***, le rang de *u* est égal au rang de $M_{B,C}(u)$, où *B* est une base de ***E*** et *C* une base de ***F***. La matrice J_r est l'élément $(\alpha_{i,j})$ de $M_{n,p}$ (**K**) défini par les relations : $\alpha_{i,j} = 1$ si $i = j \leq r$ et 0 dans les autres cas.

Systèmes d'équations linéaires

Définition, système homogène associé ; interprétation. Description de l'ensemble des solutions. Rang d'un système linéaire. Dimension de l'espace vectoriel des solutions d'un système linéaire homogène. Existence et unicité de la solution lorsque $r = n = p$ (système de Cramer). Résolution des systèmes de Cramer triangulaires. Emploi de la méthode du pivot de Gauss pour la résolution des systèmes de Cramer.	Les étudiants doivent connaître l'interprétation d'un système de n équations linéaires à p inconnues, à l'aide des vecteurs de $\mathbf{K}^n$, des formes linéaires sur $\mathbf{K}^p$, d'une application linéaire de $\mathbf{K}^p$ dans $\mathbf{K}^n$ (ainsi que la traduction matricielle correspondante). Le théorème de Rouché-Fontené et les matrices bordantes sont hors programme.

Déterminant d'ordre 2 et 3

Déterminant de deux vecteurs dans une base d'un espace vectoriel de dimension 2, de trois vecteurs dans une base d'un espace vectoriel de dimension 3. Caractérisation des bases. Déterminant d'un endomorphisme, du composé de deux endomorphismes, caractérisation des automorphismes. Déterminant d'une matrice carrée. Déterminant du produit de deux matrices.	Application à l'expression de la solution d'un système de Cramer à deux ou trois inconnues. Dans le plan, lignes de niveau de $M \to \det(\vec{u}, \vec{AM}),$ équation d'une droite du plan. Extension à l'espace. Lorsque $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, application à l'orientation du plan, de l'espace ; la donnée d'une base détermine une orientation. Bases directes du plan ou de l'espace orienté.

1. **Géométrie affine réelle**

a. **Translation, sous- espace affines**

Translations d'un espace vectoriel ***E*** ; natation $A + x$ où A est un point de ***E*** et x un vecteur de ***E***. Définition d'un sous-espace affine ***W*** (c'est à dire une partie de ***E*** de la forme A+***F***, où ***F*** est un sous-espace vectoriel de ***E***). Direction et dimension d'un sous-espace affine, vecteurs directeurs d'un sous-espace affine. Sous-espaces affines parallèles. Intersection de deus sous-espaces affines, direction et dimension de cette intersection lorsqu'elle n'est pas vide.	Les éléments de ***E*** sont appelés indifféremment vecteurs ou points. On dit qu'un sous-espace affine ***W*** est parallèle à un sous-espace affine ***W'*** si la direction de ***W*** est un sous- espace vectoriel de celle de ***W'***. Les étudiants doivent maîtriser les relations d'incidence entre droites d'un plan, et entre droites et plan de l'espace. En revanche l'étude des relations d'incidence en dimension quelconque est hors programme.

Applications affines, transformations affines

Définition d'une application affine d'un espace vectoriel dans un autre, application linéaire associée ; translations, homothéties, projections. Image d'un sous-espace affine par une application affine. Définition d'un isomorphisme affine, d'un automorphisme affine (ou transformation affine) ; translations, homothéties de rapport non nul, affinités, symétries. Les transformations affines constituent un groupe appelé groupe affine.	Les étudiants doivent savoir qu'une application affine conserve l'alignement et le parallélisme. En revanche, l'étude générale des applications affines est hors programme.

Repérés cartésiens

Repères cartésiens d'un sous-espace affine ***W***, repère cartésien canonique de $\mathbf{R}^n$, $n = 2$ *ou* 3 ;	Un repère cartésien de ***W*** est un couple formé d'un point de ***W*** et d'une base de la direction de ***W***.

coordonnées d'un point, expression d'une application affine.	
Changement d'origine, changement de repère.	
Equations cartésiennes d'une droit du plan, d'un plan de l'espace. Définition d'une droite de l'espace par deux équations.	L'étude générale des équations définissant un sous- espace affine est hors programme.
Définition d’un paramétrage d'une droite, d'une demi-droite, d'un plan, d'un demi-plan.	La donnée d'un repère cartésien détermine un paramétrage.

Barycentres

Définition des barycentres, associativité. Stabilité d'un sous-espace affine par barycentration.	La caractérisation des sous-espaces affines à l'aide des barycentres, les notions de coordonnées barycentriques, de repère affine et d'enveloppe convexe sont hors programme.
Définition d'un segment, paramétrage d'un segment.	La caractérisation des applications affines à l'aide des barycentres est hors programme.
Définition d'une partie convexe.	
Image d'un barycentre par une application affine.	

I. ESPACES VECTORIELS EUCLIDIENS ET GEOMETRIE EUCLIDIENNE

1. Produit scalaire, espaces vectoriels euclidiens

a. Produit scalaire

	L'étude de ces notions doit être illustrée par de nombreux exemples, et notamment :
Produit scalaire $(x, y) \to (x\|y)$ (noté aussi en géométrie $(\vec{x}, \vec{y}) \to \vec{x}.\vec{y}$) sur un **R**-espace vectoriel.	• le produit scalaire canonique de $\mathbf{R}^n$; • $(f, g) \to (f\|g) = \int_{[a,b]} fg$ dans $C([a,b])$; • $(f, g) \to (f\|g) = \frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi]} fg$ dans l'espace vectoriel $C_{2\pi}$
Inégalité de Cauchy-Schwarz ; norme euclidienne, distance associée, inégalité triangulaire.	des fonctions continues 2π périodiques sur **R**.
Vecteurs unitaires. Vecteurs orthogonaux, sous-espaces vectoriels orthogonaux, orthogonal d'un sous-espace vectoriel. Familles orthonormales ;	Les étudiants doivent connaître l'interprétation

relation de Pythagore pour une famille orthogonale finie. Relations entre produit scalaire et norme : $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x\|y)$ $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(x\|y)$ $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ $4(x\|y) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2$ (identité de polarisation) Définition d'un espace vectoriel euclidien.	géométrique de ces relations (triangle et parallélogramme). Un espace vectoriel euclidien est espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

Espaces vectoriels euclidiens de dimension *n*, où *n* = 2 ou 3

Existence de bases orthonormales, complétion d'une famille orthonormale en une base orthonormale. La donnée d'une base orthonormale d'un espace vectoriel euclidien ***E*** de dimension *n* détermine un isomorphisme de $\mathbf{R}^n$ (muni du produit scalaire canonique) sur ***E***. L'orthogonale d'un sous-espace vectoriel ***F*** est un supplémentaire de ce sous-espace vectoriel, appelé supplémentaire orthogonale de ***F***, et noté $F^{\perp}$ ou F^{o}. Projecteurs orthogonaux , symétries orthogonales, réflexions. Dans plan (resp. un espace) euclidien orienté ***E***, la donnée d'une droite ***D*** induit une orientation de la droite (resp. du plan) $D^{\perp}$.	Expression dans une base orthonormale des coordonnées et de la norme d'un vecteur, du produit scalaire de deux vecteurs, de la distance de deux points. Toute forme linéaire *f* sur un espace vectoriel euclidien s'écrit de manière unique sous la forme $f(x) = (a\|x)$, où *a* est vecteur. Expression de la projection orthogonale d'un vecteur sur un sous-espace muni d'une base orthonormale.

Automorphismes orthogonaux

Définition d'un automorphisme orthogonal d'un espace vectoriel euclidien ***E*** de dimension *n*	Caractérisation d'un automorphisme orthogonal par l'image d'une (de toute) base orthonormale.

(c’est-à-dire un automorphisme de ***E*** conservant le produit scalaire). Caractérisation à l'aide de la conservation de la norme. Définition du groupe orthogonal ***O***(***E***) ; symétries orthogonales, réflexions. Etant donnés deux vecteurs distincts *a* et *b* de ***E*** tels que $\lVert a\rVert = \lVert b\rVert$, il existe une réflexion et une seule échangeant *a* et *b*. Définition des matrices orthogonales et du groupe ***O***(*n*), caractérisation des matrices orthogonales par leurs vecteurs colonnes. Caractérisation d'un automorphisme orthogonal à l'aide de la matrice associée dans une (toute) base orthonormale. Changement de base orthonormale. Déterminant d'une matrice orthogonale, d'un automorphisme orthogonal ; déterminant d'une réflexion. Définition du groupe spécial ***SO***(***E***) (rotations), du groupe ***SO***(*n*). Dans un espace vectoriel euclidien orienté de dimension *n*, déterminant de *n* vecteurs dans une base orthonormale directe, noté $Det(x_1, x_2, \dots x_n)$ ou $[x_1, x_2, \dots x_n]$. Dans un espace euclidien orienté de dimension 3, produit vectoriel, notations $u \wedge v$ ou $u \times v$.	L'étude générale du groupe orthogonal est hors programme. Les matrices orthogonales sont définies à partir de l'automorphisme de R^n associé. Caractérisation des matrices orthogonales par l'une des relations $^tM.M = I_n$ ou $M.^tM = I_n$ Caractérisation d'une rotation par l'image d'une (de toute) base orthonormale directe. L'étude générale du groupe des rotations est hors programmes. Les étudiants doivent connaître l'interprétation géométrique de $\lvert Det(a,b)\rvert$ et de $\lvert Det(a,b,c)\rvert$ en termes d'aire et de volume. Expression des coordonnées du produit vectoriel dans une base orthonormale directe.

Automorphismes orthogonaux du plan

Dans un plan euclidien orienté, mesure θ (définie modulo 2π) de l'angle orienté de deux vecteurs *a* et *b* non nuls. Matrice dans une base orthonormale directe d'une rotation, mesure de l'angle d'une rotation ; matrice de rotation *R* (θ) associée à un nombre réel θ ; morphisme $\theta \rightarrow$ *R* (θ) de **R** sur ***SO***(2).	Relations $(a \mid b) = \lVert a\rVert \lVert b\rVert \cos\theta$, $\mathrm{Det}(a,b) = \lVert a\rVert \lVert b\rVert \sin\theta$ Si u est la rotation d'angle de mesure θ, alors pour tout vecteur unitaire *a*, $\cos\theta = (a \mid u(a))$ et $\sin\theta = \mathrm{Det}(a, u(a))$.

Automorphismes orthogonaux de l'espace

Dans un espace vectoriel euclidien de dimension 3, mesure θ (où $0 \le \theta \le \pi$) de l'angle de deux vecteurs *a* et *b* non nuls. Axe et mesure de l'angle d'une rotation d'un espace euclidien orienté de dimension 3. Etant donnée une rotation *u* d'axe dirigé par un vecteur unitaire *a* et d'angle de mesure θ (où $0 \le \theta \le \pi$), l'image d'un vecteur *x* orthogonal à l'axe est donnée par $u(x) = (\cos\theta)x + (\sin\theta)a \wedge x$	Relations. $(a\|b) = \\|a\\| \\|b\\| \cos\theta$, $a \wedge b = \\|a\\|.\\|b\\| \sin\theta$ Les étudiants doivent savoir déterminer l'axe et la mesure de l'angle d'une rotation, ainsi que l'image d'un vecteur quelconque et la matrice à cette rotation dans une base orthonormale directe. En revanche, l'étude générale de la réduction des automorphismes orthogonaux de l'espace est hors programme.

1. **Géométrie euclidienne du plan et de l'espace**

Pour les travaux pratiques et les sujets d'évaluation, on se limitera aux applications directes du cour.

a. **Distances, angles**

Repères orthonormaux. Sous-espace affines orthogonaux du plan et de l'espace ; projections orthogonales. Distance d'un point à une droite du plan, à une droite ou un plan de l'espace. Dans le plan euclidien orienté, mesure de l'angle orienté de deux demi-droites. Dans l'espace euclidien de dimension 3, mesure de l'angle de deux droites, de deux plans, d'une droite et d'un plan.	Les étudiants doivent savoir calculer les projections orthogonales, les distances et mesures des angles indiquer ci-contre, et savoir les exprimer dans un repère orthonormale.

Isométries et similitudes

Définition d'une isométrie : transformation affine conservant les distances. Définition d'un	Tout autre connaissance sur les isométries est hors programme.

déplacement. Translations, réflexions, rotations. Les isométries et les déplacements constituent des sous groupes du groupe affine. Définition d'une similitude : transformation affine multipliant les distances dans un rapport donné. Définition d'une similitude directe. Homothéties de rapport non nul, translations, rotations. Les similitudes et les similitudes directes constituent des sous groupes du groupe affine.	Tout autre connaissance sur les similitudes est hors programme.

Cercles et Sphères

Dans le plan, intersection d'un cercle et d'une droite. Dans l'espace, intersection d'une sphère et d'un plan. Equations cartésiennes d'un cercle, d'une sphère.	Caractérisation d'un cercle et d'une sphère par l'équation $\vec{MA}.\vec{MB} = 0$ où *AB* est un diamètre.

Coniques

Définition par excentricité, foyer et directrice d'une parabole, d'une ellipse, d'une hyperbole. Equations réduites, centres, sommets, foyers. Asymptotes d'une hyperbole. Définition d'une conique par équation cartésienne (dans un repère orthonormale) de la forme $\alpha x^2 + \beta y^2 + 2\gamma x + 2\delta y + \varepsilon = 0$ Equation réduite. Projection orthogonale d'un cercle de l'espace sur un plan.	En dehors du cas indiquer ci-contre et de celui des hyperboles définies par une relation $xy = \lambda$, aucune connaissance spécifique sur la réduction des coniques définies par une équation cartésienne n'est exigible des étudiants.

Nombres complexes et géométrie plane

Isomorphisme canonique de l'espace $\mathbf{R}^2$ sur le **R**-espace vectoriel **C**. Affixe d'un point, d'un vecteur. Interprétation géométriques des transformations : $z \to \bar{z}$, $z \to z+b$, $z \to az$, $z \to az+b$ et $z \to a\bar{z}+b$. Interprétation du module et de l'argument de $\frac{z-a}{z-b}$. Condition de cocyclicité de quatre points.	Les étudiants doivent savoir interpréter à l'aide des nombres complexes les notion suivantes de géométrie euclidienne plane : distance, mesure d'angle, barycentre, alignement, orthogonalité.